Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE TÜBINGEN
R. NEVANLINNA HELSINKI
F. K. SCHMIDT HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

74. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. AUGUST 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

74. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Specht, W., Zur Theorie der elementaren Mittel 91
Jurkat, W. B., Polynomial approximation of continuous functions on linear spaces 99
Hofmann, J. E., Über die Quadrisectio trianguli 105
Picone, M., Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm . . 119
Heinz, E., Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement 129
Collatz, L., Monotone Operatoren bei Anfangswertaufgaben von Differentialgleichungen 158
Heuser, H., Zur Eigenwerttheorie einer Klasse symmetrischer Operatoren 167
Tamaschke, O., Submodulare Verbände 186

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. 74, 91–98 (1960)

Zur Theorie der elementaren Mittel

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

WILHELM SPECHT

Bezeichnet $\mathfrak{P}_n$ für eine beliebige Dimension $n>1$ die Menge aller n-stelligen reellen Vektoren

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit positiven Komponenten, so läßt sich bei einer beliebig vorgegebenen Gewichtsverteilung

$$p=(p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad \text{mit} \quad p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

in positiven Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zu jedem von Null verschiedenen reellen Parameterwert s für jeden Vektor $x\in\mathfrak{P}_n$ das *elementare Mittel*

$$\mathfrak{M}_s(p, x)=\left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}} \tag{1.1}$$

(als positiver Wert) eindeutig erklären. Erklärt man noch das *geometrische Mittel*

$$\mathfrak{M}_0(p, x)=\exp\left(\sum p_\nu \log x_\nu\right) \tag{1.2}$$

und die *Extrema*

$$\mathfrak{M}_{-\infty}(p, x)=\lim_{s\to-\infty}\left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}}=\min_{(\nu)}(x_\nu), \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{M}_{+\infty}(p, x)=\lim_{s\to+\infty}\left(\sum p_\nu x_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}}=\max_{(\nu)}(x_\nu), \tag{1.4}$$

so besteht bekanntlich [1]) die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_s(p, x)\leqq\mathfrak{M}_t(p, x) \quad \text{für} \quad -\infty\leqq s<t\leqq+\infty,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau im Falle $x_1=x_2=\cdots=x_n$ zutrifft.

Während demnach der Quotient

$$Q_{s,t}(p, x)=\frac{\mathfrak{M}_t(p, x)}{\mathfrak{M}_s(p, x)} \quad \text{für} \quad -\infty<s<t<+\infty \tag{2.1}$$

eine von der Wahl der Gewichtsverteilung (p), der Wahl des Vektors $x\in\mathfrak{P}_n$ und von der Dimension n unabhängige untere Grenze

$$1\leqq Q_{s,t}(p, x) \tag{2.2}$$

[1]) Man vergleiche: G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, Inequalities, insbes. Chap. II. Cambridge: University Press 1934.

besitzt, kann eine analoge obere Beschränkung nicht erwartet werden, da die obere Grenze

$$\overline{\operatorname{fin}}_{-\infty<s<t<+\infty} Q_{s,t}(p,x) = \frac{\mathfrak{M}_{+\infty}(p,x)}{\mathfrak{M}_{-\infty}(p,x)} = \frac{\max(x_\nu)}{\min(x_\nu)} = \beta(x), \tag{2.3}$$

die ich als die *(relative) Breite* des Vektors $x \in \mathfrak{P}_n$ bezeichnen will, in der Menge $\mathfrak{P}_n$ keiner oberen Beschränkung unterliegt.

Aus diesem Grunde liegt es nahe, die Frage einer oberen Abschätzung des Quotienten $Q_{s,t}(p,x)$ unter der Beschränkung auf die Menge $\mathfrak{P}_n(B)$ aller Vektoren $x \in \mathfrak{P}_n$ zu untersuchen, deren relative Breite der Bedingung

$$1 \leqq \beta(x) \leqq B \tag{3}$$

mit einer festen Konstanten $B \geqq 1$ unterliegt. Unter dieser Einengung der Fragestellung gilt nach (2.3) jedenfalls die Abschätzung

$$1 \leqq Q_{s,t}(p,x) \leqq \beta(x) \leqq B. \tag{4}$$

Eine genauere Untersuchung führt auf den nachstehenden

SATZ 1. *Für jeden Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$ einer relativen Breite $1 \leqq \beta(x) \leqq B$ besteht bei beliebiger Gewichtsverteilung (p) die Ungleichung*

$$1 \leqq Q_{s,t}(p,x) \leqq \Gamma_{s,t}(B) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < +\infty \tag{5.1}$$

mit der (genauen) oberen Schranke

$$\Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{t-s}{t} \cdot \frac{B^t-1}{B^t-B^s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{s}{t-s} \cdot \frac{B^t-B^s}{B^s-1}\right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{für} \quad st \neq 0, \tag{5.2}$$

$$\Gamma_{0,t}(B) = \lim_{s\to 0} \Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{B^t-1}{t \log B}\right)^{\frac{1}{t}} \exp\left(\frac{\log B}{B^t-1} - \frac{1}{t}\right), \tag{5.3}$$

$$\Gamma_{s,0}(B) = \lim_{t\to 0} \Gamma_{s,t}(B) = \left(\frac{s \log B}{B^s-1}\right)^{\frac{1}{s}} \exp\left(\frac{1}{s} - \frac{\log B}{B^s-1}\right). \tag{5.4}$$

BEWEIS. Bildet man aus dem Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$ mit einem beliebigen reellen Exponenten s den Vektor

$$x^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s),$$

so besteht, wie man leicht erkennt, für die relative Breite die Gleichung

$$\beta(x^s) = (\beta(x))^{|s|}. \tag{6.1}$$

Insbesondere gilt also

$$\beta(x^{-1}) = \beta(x). \tag{6.2}$$

Daher gehört ein Vektor x genau dann zur Menge $\mathfrak{P}_n(B)$, wenn für einen von Null verschiedenen Exponenten s der Vektor x^s der Menge $\mathfrak{P}_n(B^{|s|})$ angehört. Schließlich besteht für jeden reellen Wert s, jeden Vektor $x \in \mathfrak{P}_n$

und jede Gewichtsverteilung (p) die Gleichung

$$\mathfrak{M}_s(p, x) = \left(\mathfrak{M}_{-s}(p, x^{-1})\right)^{-1},$$

also auch die Gleichung

(7) $$Q_{s,t}(p, x) = Q_{-t,-s}(p, x^{-1}) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < \infty.$$

Da wegen (6.2) mit dem Vektor x auch der reziproke Vektor x^{-1} die Menge $\mathfrak{P}_n(B)$ durchläuft, folgt hieraus die Beziehung

(8) $$\Gamma_{s,t}(B) = \Gamma_{-t,-s}(B) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < \infty.$$

Aus diesem Grunde genügt es, den Satz 1 für die drei Fälle

a) $0 < s < t < \infty$; b) $0 = s < t < \infty$; c) $-\infty < s < 0 < t < \infty$

zu beweisen.

Da für jeden positiven Wert λ die Gleichung

$$Q_{s,t}(p, \lambda x) = Q_{s,t}(p, x)$$

besteht, ist die gesuchte Schranke $\Gamma_{s,t}(B)$ die obere Grenze

$$\Gamma_{s,t}(B) = \overline{\operatorname{fin}}_{(p,x)} Q_{s,t}(p, x) \leqq B$$

in der Teilmenge

$$\mathfrak{R}_n(B): \quad 0 < p_\nu < 1; \quad \sum p_\nu = 1; \quad 1 \leqq x_\nu \leqq B$$

des $2n$-dimensionalen euklidischen (p, x)-Raumes. Dieser Sachverhalt ermöglicht eine weitere Reduktion des Problems auf drei Sonderfälle:

a) Im Falle $0 < s < t < \infty$ setze man $1 < \tau = t/s$ und

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x^s \quad \text{mit} \quad 1 \leqq y_\nu = x_\nu^s \leqq B^s.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q_{s,t}^s(p, x) = \frac{\mathfrak{M}_t^s(p, x)}{\mathfrak{M}_s^s(p, x)} = \frac{\mathfrak{M}_\tau(p, y)}{\mathfrak{M}_1(p, y)} = Q_{1,\tau}(p, y),$$

also auch die Gleichung

(9.1) $$\Gamma_{s,t}^s(B) = \Gamma_{1,t/s}(B^s) \quad \text{für} \quad 0 < s < t < \infty.$$

b) Im Falle $0 = s < t < \infty$ setze man

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x^t \quad \text{mit} \quad 1 \leqq y_\nu = x_\nu^t \leqq B^t.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q_{0,t}^t(p, x) = \frac{\mathfrak{M}_t^t(p, x)}{\mathfrak{M}_0^t(p, x)} = \frac{\mathfrak{M}_1(p, y)}{\mathfrak{M}_0(p, y)} = Q_{0,1}(p, y),$$

also auch die Gleichung

(9.2) $$\Gamma_{0,t}^t(B) = \Gamma_{0,1}(B^t) \quad \text{für} \quad 0 = s < t < \infty.$$

c) Im Falle $s<0<t$ setze man

$$r=|s| \quad \text{und} \quad \tau=t/r,$$

ferner

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)=x^r \quad \text{mit} \quad 1\leqq y_\nu=x_\nu^r\leqq B^r.$$

Dann besteht die Gleichung

$$Q_{s,t}^r(p, x)=\frac{\mathfrak{M}_t^r(p, x)}{\mathfrak{M}_s^r(p, x)}=\frac{\mathfrak{M}_\tau(p, y)}{\mathfrak{M}_{-1}(p, y)}=Q_{-1,\tau}(p, y),$$

also auch die Gleichung

$$\Gamma_{s,t}^{|s|}(B)=\Gamma_{-1,t/|s|}(B^{|s|}) \quad \text{für} \quad -\infty<s<0<t<\infty. \tag{9.3}$$

Der Beweis des Satzes 1 ist damit auf die Bestimmung der drei Konstanten

(I) $\Gamma_{1,\tau}(B)$ für $\tau>1$; (II) $\Gamma_{0,1}(B)$; (III) $\Gamma_{-1,\tau}(B)$ für $\tau>0$

zurückgeführt.

FALL I. Die Berechnung der Konstanten

$$\Gamma_{1,\tau}(B)=\overline{\underset{(p,x)}{\text{fin}}}\, Q_{1,\tau}(p, x) \qquad (1<\tau<\infty)$$

für die Menge $\mathfrak{R}_n(B)$ zerlegen wir in die Bestimmung des Maximums

$$\Gamma_{1,\tau}(p, B)=\max_{(x)} Q_{1,\tau}(p, x)$$

bei fester Gewichtsverteilung (p) im abgeschlossenen Bereich

$$\mathfrak{X}_n(B): \quad 1\leqq x_\nu\leqq B$$

des n-dimensionalen euklidischen (x)-Raumes und die Bestimmung der oberen Grenze

$$\Gamma_{1,\tau}(B)=\overline{\underset{(p)}{\text{fin}}}\, \Gamma_{1,\tau}(p, B)$$

für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Da der Wert $\Gamma_{1,\tau}(p, B)$ an einer Stelle $z\in\mathfrak{P}_n(B)$ angenommen wird, besteht die Gleichung

$$\Gamma_{1,\tau}^\tau(p, B)=Q_{1,\tau}^\tau(p, z)=\frac{\sum p_\nu z_\nu^\tau}{(\sum p_\nu z_\nu)^\tau}.$$

Wir setzen für einen beliebigen Index $1\leqq\varkappa\leqq n$

$$p_\varkappa=p; \quad \sum_{\nu\neq\varkappa} p_\nu z_\nu^\tau=(1-p)\, a_\tau; \quad \sum_{\nu\neq\varkappa} p_\nu z_\nu=(1-p)\, a_1$$

und bilden die Funktion

$$\varphi(x)=\frac{p\, x^\tau+(1-p)\, a_\tau}{(p\, x+(1-p)\, a_1)^\tau} \quad \text{für} \quad 1\leqq x\leqq B.$$

Die Ableitung

$$\varphi'(x)=p(1-p)\,\tau\,\frac{(1-p)\, a_1\, x^{\tau-1}-a_\tau}{(p\, x+(1-p)\, a_1)^{\tau+1}}$$

zeigt, daß die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $1 \leqq x \leqq B$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt, weshalb wir für jeden Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$ auch eine der Gleichungen

$$z_\varkappa = 1 \quad \text{oder} \quad z_\varkappa = B$$

erhalten. Mithin genügt das Maximum $\Gamma_{1,\tau}(p, B)$ einer Gleichung

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(p, B) = \frac{1-\xi+\xi B^\tau}{(1-\xi+\xi B)^\tau} = \psi(\xi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1,$$

so daß wir weiter erhalten

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(B) = \max_{0 \leqq \xi \leqq 1} \psi(\xi).$$

Da die Ableitung

$$\psi'(\xi) = \frac{B^\tau - 1 - \tau(B-1) - \xi(\tau-1)(B-1)(B^\tau-1)}{(1-\xi+\xi B)^{\tau+1}}$$

die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B^\tau - 1 - \tau(B-1)}{(\tau-1)(B-1)(B^\tau-1)} < 1$$

besitzt, erhalten wir

$$\Gamma_{1,\tau}^{\tau}(B) = \psi(\xi_0) = \frac{(\tau-1)^{\tau-1}(B^\tau-1)^\tau}{\tau^\tau (B-1)(B^\tau-B)^{\tau-1}}$$

und damit

$$\Gamma_{1,\tau}(B) = \frac{\tau-1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}\left(\frac{B^\tau-1}{B^\tau-B}\right)\left(\frac{B^\tau-B}{B-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

in Übereinstimmung mit der Angabe des Satzes 1. Auf Grund der Gln. (8) und (9.1) folgt hieraus der Beweis des Satzes für alle Parameterpaare

$$-\infty < s < t < 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 < s < t < \infty.$$

Fall II. In gleicher Weise wie zuvor erhalten wir die Konstante

$$\Gamma_{0,1}(B) = \overline{\operatorname{fin}}_{(p,x)} Q_{0,1}(p, x)$$

durch Bestimmung des Maximums

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = \max_{(x)} Q_{0,1}(p, x)$$

im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{X}_n(B)$ und durch die Bestimmung der oberen Grenze

$$\Gamma_{0,1}(B) = \overline{\operatorname{fin}}_{(p)} \Gamma_{0,1}(p, B)$$

für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Der Wert $\Gamma_{0,1}(p, B)$ wird an einer Stelle $z \in \mathfrak{P}_n(B)$ angenommen:

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = Q_{0,1}(p, z) = \frac{\sum p_\nu z_\nu}{\exp(\sum p_\nu \log z_\nu)}.$$

Setzen wir für einen beliebigen Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$

$$p_\varkappa = p; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu = (1-p) a_1; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu \log z_\nu = (1-p) \log a_0$$

und bilden wir die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{p\,x + (1-p)\,a_1}{\exp(p \log x + (1-p) \log a_0)} \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq B,$$

so zeigt die Ableitung

$$\varphi'(x) = p(1-p)\,\frac{x - a_1}{x \exp(p \log x + (1-p) \log a_0)},$$

daß die Funktion $\varphi(x)$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt. Mithin besitzt das Maximum $\Gamma_{0,1}(p, B)$ eine Darstellung

$$\Gamma_{0,1}(p, B) = \frac{1 - \xi + \xi B}{\exp(\xi \log B)} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1,$$

so daß wir erhalten

$$\Gamma_{0,1}(B) = \max_{0 \leqq \xi \leqq 1} \psi(\xi).$$

Da die Ableitung

$$\psi'(\xi) = [(B-1) - (1 + \xi(B-1)) \log B] \exp(-\xi \log B)$$

die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B - 1 - \log B}{(B-1) \log B} < 1$$

besitzt, finden wir

$$\Gamma_{0,1}(B) = \psi(\xi_0) = \frac{1}{e}\,\frac{B-1}{\log B} \exp\left(\frac{\log B}{B-1}\right)$$

in Übereinstimmung mit den Angaben des Satzes 1. Auf Grund der Gln. (8) und (9.2) folgt hieraus der Beweis des Satzes für die Fälle

$$-\infty < s < t = 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 = s < t < +\infty.$$

FALL III. Die Maxima

$$\Gamma_{-1,\tau}(p, B) = \max_{(x)} Q_{-1,\tau}(p, x) \quad \text{für} \quad \tau > 0$$

im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{X}_n(B)$ liefern die Konstante

$$\Gamma_{-1,\tau}(B) = \overline{\operatorname{fin}}_{(p)}\, \Gamma_{-1,\tau}(p, B)$$

als obere Grenze für alle möglichen Gewichtsverteilungen. Der Wert $\Gamma_{-1,\tau}(p, B)$ wird an einer Stelle $z \in \mathfrak{P}_n(B)$ angenommen:

$$\Gamma^{\tau}_{-1,\tau}(p, B) = Q^{\tau}_{-1,\tau}(p, z) = (\sum p_\nu z_\nu^{\tau})\,(\sum p_\nu z_\nu^{-1})^{\tau}.$$

Setzen wir für einen beliebigen Index $1 \leqq \varkappa \leqq n$

$$p_\varkappa = p; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu^{\tau} = (1-p)\,a_{\tau}; \quad \sum_{\nu \neq \varkappa} p_\nu z_\nu^{-1} = (1-p)\,a_{-1}$$

und

$$\varphi(x) = (p\,x^{\tau} + (1-p)\,a_{\tau})\,(p\,x^{-1} + (1-p)\,a_{-1})^{\tau} \quad \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq B,$$

so zeigt die Ableitung

$$\varphi'(x) = p(1-p)\,\tau\,\frac{(p+(1-p)\,a_{-1}\,x)^{\tau-1}}{x^{\tau+1}}\,(a_{-1}\,x^{\tau+1} - a_\tau),$$

daß die Funktion $\varphi(x)$ ihr Maximum in einem der Randpunkte $x=1$ oder $x=B$ annimmt. Mithin erhalten wir für das Maximum $\Gamma_{-1,\tau}(p, B)$ eine Gleichung

$$\Gamma^{\tau}_{-1,\tau}(p, B) = (1-\xi+\xi\,B^{\tau})\,(1-\xi+\xi\,B^{-1})^{\tau} = \psi(\xi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1.$$

Die Nullstelle

$$0 < \xi_0 = \frac{B^{\tau} - 1 - \tau(1-B^{-1})}{(\tau+1)\,(B^{\tau}-1)\,(1-B^{-1})} < 1$$

der Ableitung

$$\psi'(\xi) = \big(1-(1-B^{-1})\,\xi\big)^{\tau-1}\,[B^{\tau} - 1 - \tau(1-B^{-1}) - (\tau+1)\,(B^{\tau}-1)\,(1-B^{-1})\,\xi]$$

liefert den Wert

$$\Gamma^{\tau}_{-1,\tau}(B) = \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau}\left(\frac{B^{\tau}-B^{-1}}{B^{\tau}-1}\right)^{\tau}\left(\frac{B^{\tau}-B^{-1}}{(\tau+1)\,(1-B^{-1})}\right),$$

also

$$\Gamma_{-1,\tau}(B) = \left(\frac{\tau+1}{\tau}\cdot\frac{B^{\tau}-B^{-1}}{B^{\tau}-1}\right)^{-1}\left(\frac{-1}{\tau+1}\cdot\frac{B^{\tau}-B^{-1}}{B^{-1}-1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

in Übereinstimmung mit den Angaben des Satzes 1. Nach (9.3) erhält man hieraus den Wert $\Gamma_{s,t}(B)$ in den noch verbliebenen Fällen

$$-\infty < s < 0 < t < +\infty.$$

Der Beweisgang in allen drei Sonderfällen zeigt zugleich, daß die angegebenen Werte $\Gamma_{s,t}(B)$ die optimalen Schranken für das behandelte Problem darstellen.

Übertragungen des Satzes 1 auf Integrale liegen nahe: Bezeichnet $p(x)$ eine beliebige (nichtnegativwertige) integrable normierte Belegungsfunktion des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ der reellen Zahlengeraden:

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 1,$$

so können für jede im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte positivwertige integrable Funktion $f(x)$ die Integralmittel

$$\mathfrak{M}_s(p, f) = \left[\int_0^1 f^s(x)\,p(x)\,dx\right]^{\frac{1}{s}} \quad \text{mit} \quad s \neq 0 \tag{10.1}$$

$$\mathfrak{M}_0(p, f) = \exp\left[\int_0^1 \log f(x)\cdot p(x)\,dx\right] \tag{10.2}$$

gebildet werden. Es besteht dann der

Satz 2. *Für jede auf dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ der reellen Zahlengeraden erklärte integrable positivwertige Funktion $f(x)$ mit den Schranken*

$$0 < f_0 \leqq f(x) \leqq F_0 \quad \textit{auf} \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

besteht bei beliebiger normierter Belegungsfunktion $p(x)$ die Ungleichung

$$(11) \qquad 1 \leqq \frac{\mathfrak{M}_t(p,f)}{\mathfrak{M}_s(p,f)} \leqq \Gamma_{s,t}\left(\frac{F_0}{f_0}\right) \quad \text{für} \quad -\infty < s < t < +\infty.$$

Als leicht überprüfbare Beispiele zu diesem Satze gebe ich an:

1. Auf dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ sei eine beliebige beschränkte integrable Funktion $f(x)$ erklärt:

$$f_0 \leqq f(x) \leqq F_0.$$

Dann besteht für jede Belegungsfunktion $p(x)$ des Intervalls die Ungleichung

$$1 \leqq \int_0^1 \int_0^1 e^{f(x)-f(y)}\, p(x)\, p(y)\, dx\, dy \leqq \left(\operatorname{Cof}\frac{F_0 - f_0}{2}\right)^2 = \Gamma_{-1,1}(e^{F_0-f_0}).$$

2. Unter den gleichen Voraussetzungen besteht auch die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{\int_0^1 \exp[f(x)]\, p(x)\, dx}{\exp\left[\int_0^1 f(x)\, p(x)\, dx\right]} \leqq \frac{e^{F_0-f_0}-1}{(F_0-f_0)\, e} \cdot \exp\left(\frac{F_0-f_0}{e^{F_0-f_0}-1}\right) = \Gamma_{0,1}(e^{F_0-f_0}).$$

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 23. September 1959)

JURKAT, W. B.
Math. Zeitschr. 74, 99—104 (1960)

Polynomial approximation of continuous functions on linear spaces

Dedicated to ERICH KAMKE on his 70-th birthday

By

W. B. JURKAT[1])

Let f denote a continuous mapping of a Hausdorff space X into a real linear Hausdorff space Y (i.e. separated topological vector space with real scalars), let G be a set of real-valued continuous functionals on X, and denote by P the set of all polynomials p in the functions from G with coefficients from Y:

$$p(x) = \sum y_{n_1,\ldots,n_k} g_1(x)^{n_1} \ldots g_k(x)^{n_k}.$$

These polynomials are continuous functions on X into Y and shall be used in approximating f. Here, of course, we have to specify in a reasonable way the type of approximation desired. It seems natural to ask for uniform approximation on X since limit points of P in this topology are necessarily continuous functions. Under the additional assumptions that X is compact and that Y is locally convex[2]) we obtain by obvious changes in BOURBAKI's proof [2, Chap. X, § 5, No. 4] the following generalization of the Weierstrass-Stone theorem: *In order that every continuous f can uniformly be approximated on X by polynomials from P it is necessary and sufficient that the points of X can be separated by means of functionals from G, i.e. to each pair $x_1 \neq x_2$ from X there exists a $g \in G$ with $g(x_1) \neq g(x_2)$.*

For non-compact spaces X one can, in general, not hope to obtain polynomial approximation uniformly on X. One should either include more functions into P or weaken the topology which describes the type of approximation. It is natural to use the compact open topology[3]) in the space of continuous functions on X into Y which corresponds to uniform convergence on all compact subsets of X. Limit points of P in this topology are necessarily functions which are continuous on all compact subsets of X. To ensure that these limit points are continuous on X we simply assume that X is a metric space. If, moreover, Y is locally convex (and real, separated) then the theorem mentioned above can readily be extended as follows: *In order that P is dense in the space of all continuous functions on X into Y under the compact open topology it is necessary and sufficient that the points of X can be separated by*

[1]) This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research under contract No. AF 49(638)-619.

[2]) For a definition see BOURBAKI [3, Chap. II].

[3]) For a definition see KELLEY [5, Chap. 7].

means of functionals from G. The metric of X is not needed for the sufficiency part of the proof, but ensures that nothing of the continuity of f is lost in the approximation.

From the viewpoint of analysis the interesting spaces X will be locally convex with real or complex scalars. The Hahn-Banach theorem then implies that the set of all linear continuous functionals (real-valued or complex-valued respectively) separates the points of X and is, therefore, a natural choice for G. The theorem above applies, in case of complex scalars with the obvious change that Y also should allow complex scalars and that the polynomials should be formed in functionals from G *and* their conjugates[4]). In this way we obtain polynomial approximations for a continuous f if both X and Y are locally convex (and separated). If the compact open topology is metrizable there will even exist a (countable) sequence $p_n \in P$ which converges to f uniformly on every compact set in X. But in most cases of interest this topology is not metrizable so that the result above guarantees only a non-countable sequence converging to f which may, therefore, bear little resemblance to any of the p's. The purpose of this paper is to show that in most cases of interest every continuous function f can, nevertheless, be represented as limit of a countable sequence of polynomials in linear continuous functionals and their conjugates under the uniform convergence on compacta. This result is a non-trivial improvement even with pointwise convergence.

The author is indebted to G. G. LORENTZ for valuable remarks.

1. Main result. We *assume* the field S of *scalars* to be *either* the system of *real* numbers *or* the system of *complex* numbers throughout the paper. Following Bourbaki locally convex, metric, complete spaces are called Fréchet spaces. These are vector spaces which are complete under a metric defined by countably many semi-norms. Any Banach space is of this type. We *assume* that X is a *Fréchet space*. A subset A of X is called separable if A contains a countable dense set. A subset B of X is called bounded if $\lambda_n x_n \to 0$ for arbitrary $x_n \in B$, $\lambda_n \in S$, $\lambda_n \to 0$, or equivalently if all defining semi-norms remain bounded on B. We *assume* that D is a *separable closed* subset of X and that there exist *countably many bounded* sets $B_n \subseteq X$ such that *every compact set* $C \subseteq D$ is *contained in one* of the B_n's. The latter assumption means that D is covered by bounded sets B_n in a certain way which can be realized, e.g., if D is bounded or if X is a Banach space. We *assume* that Y is a *Fréchet space* and that R is a topological vector *subspace* of Y. With any set G of functionals g on X (into S) we associate the set P of all polynomials p in functionals g and their conjugates $\bar{g}$, $g \in G$, with coefficients in R.

Under these assumptions we have the following

Theorem. *There exists a (universal) countable set G of linear continuous functionals g on X such that every continuous function f on D into R is limit*

[4]) Special polynomial approximations using linear functionals on a convex compact space were introduced by J. BLACKMAN in connection with electrical networks (oral communication).

of a convergent countable sequence $p_n \in P$ under the uniform convergence on all compact subsets C of D.

The set G can always be replaced by the set of all linear continuous functionals on X. If X is a separable Banach space we may take for D the whole space X or any closed subset of it. For R we may take another Banach space and put $Y = R$. This special case covers many interesting situations in functional analysis and supplies the proper approximation theorems there. For finite dimensional spaces we obtain classical forms of the Weierstraß approximation theorem.

2. Lemmas. We denote by $C[0, 1]$ the Banach space of continuous functionals on $[0, 1]$ (into S), by N the set of natural integers, and by X^N the product of spaces X, one for each $n \in N$. If X is a Fréchet space so is X^N.

Lemma 1. *Every separable Fréchet space X is isomorphic to a closed linear subspace of $C[0, 1]^N$.*

The *proof* is based on the Banach-Mazur theorem that every separable Banach space is isomorphic to a closed linear subspace of $C[0, 1]$, also in the case of complex scalars [*1*, p. 185]. Suppose that X_n is the separable Banach space obtained from X and the n-th semi-norm by first taking equivalence classes to obtain a norm and then completing the space. It is easy to see, cf. Bourbaki [*3*, Chap. II, § 5, No. 5], that X is isomorphic to a closed linear subspace of the product of the X_n's, and the proof is completed by embedding every X_n into $C[0, 1]$.

A Fréchet space X is said to have the K-property if there exist linear continuous functionals $g_{nk}(x)$ on X, and $x_{nk} \in X$, $k_n \in N$ such that

$$(1) \qquad \tau_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} g_{nk}(x)\, x_{nk} \to x \qquad (n \to +\infty)$$

for all $x \in X$. By the Banach-Steinhaus theorem, cf. Bourbaki [*3*, Chap. III, § 3, No. 6], the convergence in (1) must be uniform on every compact subset of X. A property of this type was first considered by Kolmogorov in connection with questions of compactness, cf. Banach [*1*, p. 237]. The K-property is clearly satisfied if X has a Schauder basis as, e.g., $C[0, 1]$ does. But the K-property for $C[0, 1]$ follows more easily by Fejér means or better by Bernstein polynomials. If X has the K-property so does X^N as is easily verified. Hence Lemma 1 contains the

Corollary. *Every separable Fréchet space can be embedded (isomorphically) into a Fréchet space with the K-property.*

It is even possible to show that $C[0, 1]^N$ has a Schauder basis. But this improvement is not important for us.

Under the assumptions of the Theorem we have

Lemma 2. *Every continuous function f on D into R can be extended to a continuous function F on X into R.*

This extension of TIETZE's theorem is due to DUGUNDJI [4], actually with fewer assumptions than we have listed.

3. Proof of the Theorem. We may assume $B_n \subseteqq D$, $B_n \subseteqq B_{n+1}$ $(n \in N)$ without loss of generality. If we replace X by a smaller Fréchet space containing D or by a bigger Fréchet space the Theorem remains equally true in view of the Hahn-Banach extension theorem. So we may first replace X by the closed linear hull of D which is separable and then by a Fréchet space with the K-property according to the Corollary. This space we call X again, and G will consist of the functionals occurring in (1). Now construct the extension F according to Lemma 2. Denote the metrics in X and Y by $d(x_1, x_2)$, $d(y_1, y_2)$ respectively. The continuity of F implies that to every compact set $C \subseteqq X$ and to every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that

$$d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \leqq \varepsilon \quad \text{if} \quad d(x_1, x_2) \leqq \delta, \qquad x_1 \in C, \qquad x_2 \in X. \tag{2}$$

Therefore

$$f_n(x) = F\big(\pi_n(x)\big) \to F(x) \qquad (\text{all } x \in X,\ n \to +\infty), \tag{3}$$

and uniformly so on every compact set $C \subseteqq X$. Clearly

$$f_n(x) = F_n\big(g_{n1}(x), \ldots, g_{nk_n}(x)\big), \tag{4}$$

where F_n denotes a continuous function on S^{k_n} into R. Denote by I_n an interval in S^{k_n} containing the image of the bounded set B_n under the mapping $x \to \big(g_{n1}(x), \ldots, g_{nk_n}(x)\big)$. By a finite dimensional Weierstrass approximation theorem there exists a polynomial P_n in the variables $g_{n1}, \ldots, g_{nk_n}$ and $\bar{g}_{n1}, \ldots, \bar{g}_{nk_n}$ with coefficients in R such that

$$d(F_n, P_n) \leqq 1/n \quad \text{on} \quad I_n. \tag{5}$$

This polynomial can be obtained by ideas already used in the introduction[5]). For instance one can decompose I_n into small simplices and replace F_n by a function which is linear on each simplex and maps, therefore, I_n into a finite dimensional subspace of R. Using a basis for this subspace the problem reduces to the approximation of continuous functionals on I_n which is classical and the starting point of our approach. Making the g's in P_n dependent upon x again we obtain polynomials $p_n \in P$ such that

$$d\big(f_n(x), p_n(x)\big) \leqq 1/n \quad \text{for} \quad x \in B_n. \tag{6}$$

Now consider an arbitrary compact set $C \subseteqq D$ which will be contained in B_k, say. Since $C \subseteqq B_n$ $(n \geqq k)$ we infer from (6) that $f_n(x) - p_n(x) \to 0$ uniformly on C, while (3) gives $f_n(x) \to f(x)$ uniformly on C, hence

$$p_n(x) \to f(x) \qquad \text{uniformly on } C. \tag{7}$$

[5]) G. LORENTZ remarks that Bernstein polynomials can be applied directly to this situation.

4. Remarks. Let us discuss the assumptions on D in our Theorem. To be closed is essential already for finite dimensional spaces. Separability is necessary if f is the identity mapping. The Theorem implies that for every separable Banach space X there exist polynomials $p_n \in P$ such that

$$p_n(x) \to x \qquad (\text{all } x \in X,\ n \to +\infty), \tag{8}$$

even uniformly on all compact subsets of X. This is a weaker property than the K-property (1) and typical for our Theorem. It is not known whether or not the K-property holds for every separable Banach space. For polynomial approximation it is cearly necessary that the range of f be separable. Most of the difficulties already appear for functionals f. For every Hilbert space of uncountable dimension the norm cannot be approximated by a sequence $p_n \in P$, even if G consists of all linear continuous functionals. But, perhaps, there are non-separable Banach spaces such that all continuous functionals can be approximated everywhere by varying G with the functionals. If we keep G fixed and countable the number of approximable functionals is at most equal to the power of the continuum. The covering property of D is important for metric spaces like S^N.

It is interesting to investigate approximation also under the "strong" topology of uniform convergence on all bounded sets. *Suppose* for simplicity that X and Y are Banach spaces and P the set of all polynomials constructed from all linear continuous functionals on X and their conjugates. The polynomials map bounded sets into (relatively) compact sets, and functions in the strong closure of P do the same. Under the weak topology on X the polynomials are uniformly continuous on bounded sets of X. The same holds true for functions of the strong closure of P. We want to show that this property is characteristic for elements of the closure. To this end we consider the strong bi-dual X'' which is a Banach space containing X with the same norm, and which under a "weak" topology contains X with its weak topology as a dense subspace. Moreover the closed balls in X'' are compact under this weak topology. Let us consider a function f on X into Y which is uniformly continuous on all bounded sets of X under its weak topology. As bounded set we choose a closed ball B in X. Its weak completion in X'' is denoted by B''. By weak continuity f can be extended to B''. Now the Weierstrass-Stone theorem of the introduction allows uniform approximation on the weakly compact set B'' by polynomials with coefficients in Y, where for the variables or their conjugates we may take continuous linear functionals on X'' under the weak topology (since these functionals already separate). But these functionals are nothing but extensions by weak continuity of continuous linear functionals on X (under the weak or strong topology). Restricting all functions to B it follows that f can uniformly be approximated on B by polynomials from P. Since B was arbitrary we conclude that f belongs to the strong closure of P. Since the topology of uniform convergence on bounded sets is metrizable we have the following result under the assumptions specified above: *A function f on X into Y is limit of a convergent countable*

sequence $p_n \in P$ under the uniform convergence on all bounded sets if and only if on every bounded set f is uniformly continuous under the weak topology of X. If X is reflexive ($X'' = X$) every weakly continuous function f can be approximated in this stronger sense. Weakly continuous functions depend (in a certain sense) essentially only upon finitely many parameters. Usually there will exist many strongly continuous functions which can be approximated in the stronger sense only if the set P is enlarged in a suitable way.

References

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] Bourbaki, N.: Éléments de Mathématique, Livre III, Topologie générale. Paris 1949. — [3] Bourbaki, N.: Livre V, Espaces vectoriels topologiques. Paris 1955. — [4] Dugundji, J.: An extension of Tietze's theorem. Pacific J. Math. **1**, 353—367 (1951). — [5] Kelley, J. L.: General topology. New York 1955.

Dept. of Math., Syracuse University, Syracuse, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 30. September 1959)

Hofmann, J. E.
Math. Zeitschr. 74, 105–118 (1960)

Über die Quadrisectio trianguli

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Joseph Ehrenfried Hofmann

1. Im folgenden soll zunächst einiges aus neu aufgetauchtem Material über die Frühgeschichte der Aufgabe mitgeteilt werden:

Ein Dreieck durch zwei zueinander senkrechte Gerade in vier flächengleiche Stücke zu zerschneiden (Quadrisectio trianguli).

Diese Aufgabe hat seit der Behandlung durch Jak. Bernoulli[1]) und L. Euler[2]) steigendes Interesse gefunden[3]). Sie taucht jedoch schon früher auf. So wurde sie von M. de Maubuisson, einer sonst nicht weiter bekannten Pariser Persönlichkeit, an Huygens gegeben. Dies entnehmen wir einer Notiz von Chr. Huygens[4]) auf einem Zettel, der eine Figur und einige Rechnungen von anderer Hand trägt[5]) und vielleicht von Maubuisson stammt. Bei der etwas flüchtig gezeichneten Figur[6]) (Abb. 1) findet sich außer den Streckenbezeichnungen $BF = x$, $CE = y$ und $BC = 2a$ noch die Gleichung

$$x^2 = 8ay + 8ax - 4yx - 10aa - yy, \tag{1.1}$$

aus der die Lage der 4 Punkte A, E, F, C auf der Dreieckseite AC gekennzeichnet wird, falls die in E und F beginnenden Strecken die lösenden sind.

[1]) *Solutio algebraica problematis de quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectas.* Acta eruditorum für November 1687, 617–623 = *Opera* I, ed. G. Cramer, Genf 1744, 328–335. Vgl. z. B. A. Procissi: *Il problema Bernoulliano „De quadrisectione ...".* Periodico di mat. (4) **14**, 1–21 (1934).

[2]) *Dilucidationes super problemate geometrico de quadrisectione trianguli a J. Bernoulli olim tractato,* Erstdruck in den Mém. de l'Ac. sc. de Pétersbourg **1** (1803/06), 26–48 (1809) = *Opera omnia* (1) XXVI, ed. A. Speiser, Lausanne 1953, 286–303, und *Solutio completa problematis de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales,* Erstdruck ebda 49–87 bzw. 304–333. Beide Abhandlungen wurden der Petersburger Akademie am gleichen Tage, nämlich am 3. 5. 1779 alten Stils vorgelegt. Über den Inhalt vgl. das diesbezüglich in der Einleitung (*Opera* XXX–XXXIV) Gesagte.

[3]) Vgl. G. Loria: *Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare.* Bibliotheca math. (3) **4**, 48–51 (1903).

[4]) *Œuvres complètes* XX, bearbeitet von E. J. Dijksterhuis und J. A. Vollgraff, d. Haag 1940, 428.

[5]) Dieser Zettel befindet sich im Mscr. D aus dem Huygensschen Nachlaß in Leiden und wird ergänzt durch die Aufzeichnungen auf S. 427–433 und 435–436 des Ms.; die zugehörige Figur befindet sich auf Blatt 189 der *Chartae mathematicae,* das in dieses Ms. gehört und herausgenommen wurde. Aus Datierungen von weiteren Aufzeichnungen im Mscr. D geht hervor, daß diese Blätter im Herbst 1672 niedergeschrieben wurden.

[6]) Die Punktbezeichnung C zwischen den Ecken A und C dürfte nur versehentlich hinzugefügt worden sein. Die Strecken BE und FC sind nur wenig voneinander verschieden, und zwar ist BE die kürzere. Die Seitenhalbierende AQ geht nicht durch den Schnittpunkt der aus E und F kommenden und das Dreieck ABC viertelnden Strecken.

Diese Bedingung ist zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend. Sind E und F gemäß (1.1) bestimmt, so vierteln die in E und F beginnenden und die Fläche des Dreiecks jeweils halbierenden Strecken die Fläche des Dreiecks, aber daraus geht noch nicht hervor, daß sie aufeinander senkrecht stehen müssen.

Ergänzend bemerkt HUYGENS: Wird BC durch Q halbiert und verhält sich BC zu QA wie 9 zu 8, dann sind BF und CE mittlere Proportionale zwischen BQ und $BQ+QA$ und es ist $BE=CF=\frac{1}{6}\cdot BC$. In seinen eigenen Notizen zum nämlichen Gegenstand vermerkt er, dieser Sonderfall gehe auf MAUBUISSON zurück. Unerwähnt bleibt jedoch, daß sich in diesem Fall die teilenden Strecken auf AQ schneiden und die ganze Figur hinsichtlich AQ schrägsymmetrisch ist. Ob MAUBUISSON nur der Mittelsmann oder der Erfinder der Aufgabe ist, ist im Augenblick noch ungeklärt.

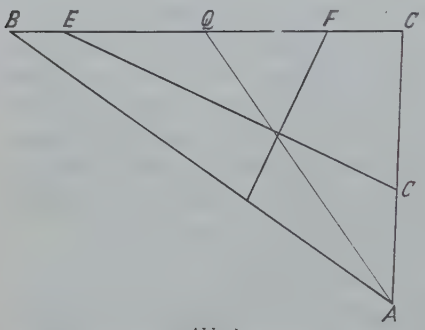

Abb. 1

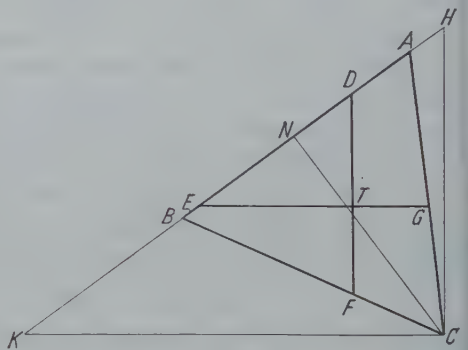

Abb. 2

2. HUYGENS hat sich im Herbst 1672 eingehend mit dieser Aufgabe befaßt[5]). Er gewinnt an Hand der Abb. 2 auf Grund rein geometrischer Überlegungen ein Äquivalent der Gl. (1.1). Nach Entlastung seiner Figur von überflüssigen und störenden Nebenlinien und Einträgen setzen wir mit HUYGENS $AB=a$, $AE=x$, $DB=y$ und schneiden die Parallelen zu den teilenden Linien DF und EG durch C mit der verlängerten AB in H und K. Weil nun $\triangle AGE=\frac{1}{2}\cdot\triangle ABC$ und $GE\parallel CK$ ist, gilt

$$\begin{cases} AE\times AG=\frac{1}{2}\cdot AB\times AC, \\ AE:AG=AK:AC, \end{cases} \tag{2.1}$$

also

$$AK=2\cdot x^2:a \quad \text{und entsprechend} \quad HB=2\cdot y^2:a. \tag{2.2}$$

Weiterhin ergibt sich aus $GE\parallel CK$ und $\triangle AEG=2\cdot\triangle DET$ das Gleichungstripel

$$AE:EG=AK:KC, \quad ET:DE=KC:HK, \quad AE\times EG=2\cdot DE\times ET. \tag{2.3}$$

Hieraus folgt nach seitenweiser Multiplikation unter Mitverwenden von (2.2)

$$a\cdot HK=4\cdot DE^2. \tag{2.4}$$

Nun ist aber

$$HK = AK + HB - AB = (2x^2 + 2y^2 - a^2) : a \tag{2.5}$$

und

$$DE = AE + DB - AB = x + y - a, \tag{2.6}$$

also

$$x^2 + 4xy + y^2 - 4a(x + y) + \tfrac{5}{2} \cdot a^2 = 0. \tag{2.7}$$

Damit ist (1.1) wiedergewonnen. HUYGENS bemerkt dazu, daß hieraus bei Deutung von x und y als cartesische Koordinaten eine Hyperbel entsteht.

Die hinzutretende Orthogonalbedingung gewinnt HUYGENS vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes aus $\triangle CHK$. Er fällt das Lot $CN = n$ aus C auf AB und rechnet anfangs etwas unzweckmäßig weiter, gelangt jedoch später zu einer symmetrischen Schlußformel, die sich mit $AN = e$, $NB = d$ so ergibt: Aus

$$HA = HB - AB = \frac{2y^2}{a} - a \quad \text{und entsprechend} \quad BK = \frac{2x^2}{a} - a \tag{2.8}$$

folgt unter Verwendung der rechtwinkligen Dreiecke HNC und KNC

$$\left(\frac{2x^2 + 2y^2}{a} - a\right)^2 = HK^2 = \left(\frac{2y^2}{a} - a + e\right)^2 + \left(\frac{2x^2}{a} - a + d\right)^2 + 2n^2, \tag{2.9}$$

also wegen $d + e = a$

$$\frac{4x^2y^2}{a^2} = \frac{2dx^2}{a} + \frac{2ey^2}{a} + n^2 - de, \tag{2.10}$$

oder

$$\left(x^2 - \frac{ae}{2}\right)\left(y^2 - \frac{ad}{2}\right) = \left(\frac{an}{2}\right)^2 [= \triangle^2]. \tag{2.11}$$

Ist nun $x = y$, dann folgt aus (2.7) entweder der nur für ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C brauchbare Wert $x = y = \frac{a}{2}$ oder der Wert $x = y = \frac{5a}{6}$. Alsdann führt (2.10) auf

$$n^2 - de = \frac{175}{324} \cdot a^2 \quad \text{oder} \quad n^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2 = \left(\frac{8a}{9}\right)^2. \tag{2.12}$$

Hier ist $n^2 + \left(\frac{d-e}{2}\right)^2$ das Quadrat der aus C kommenden Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC. Diese Seitenhalbierende verhält sich also zur Grundlinie AB wie 8 zu 9. Das ist die Begründung des oben erwähnten Ergebnisses von MAUBUISSON[7]).

Jetzt konstruiert HUYGENS die aus (2.7) und (2.11) bestimmten Kurven an einer neuen, leider nur recht flüchtig skizzierten Figur (Abb. 3), in der A als Ursprung, AB als die Richtung der positiven Y-Achse und das aus A nach unten gehende Lot zu AB als die positive X-Achse angesehen wird. Der

[7]) Die Gleichungen (2.12) finden sich nicht in den noch erhaltenen Aufzeichnungen von HUYGENS; diese sind jedoch nur skizzenhaft angelegt und noch nicht endgültig redigiert, so daß aus dem Fehlen eines logisch nötigen Zwischenstückes in den Entwicklungen nichts gegen den Autor geschlossen werden darf.

Mittelpunkt $\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$ der Hyperbel ist mit D bezeichnet; das Asymptotenpaar — es schließt ja mit AB die Winkel $\pm 60°$ ein — wird anscheinend auf

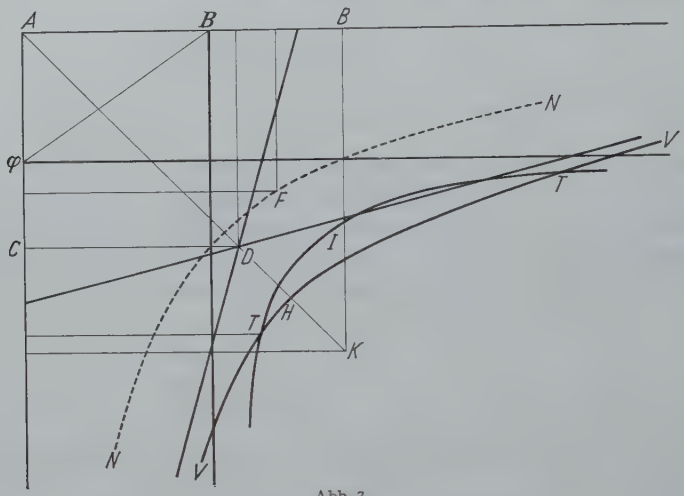

Abb. 3

Grund einer in den Aufzeichnungen nicht erhaltenen Rechnung konstruiert. Gezeichnet ist nur der Hyperbelast VHV durch den Punkt $H\left(\frac{5a}{6}; \frac{5a}{6}\right)$.

HUYGENS weiß natürlich, daß die durch (2.11) dargestellte Kurve TIT zu den beiden Koordinatenachsen symmetrisch ist, und daß für seine Zwecke zunächst nur der Schnittpunkt T mit der Hyperbel innerhalb des Quadrates $0 \leqq x \leqq a$ in Frage kommt. Er zeichnet nur den Kurvenast im I. Quadranten mit den Asymptoten $x = \sqrt{\frac{a\,e}{2}} = A\varphi$ und $y = \sqrt{\frac{a\,d}{2}} = AB$, so daß $A\varphi^2 + AB^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2$. Zur Konstruktion bedient er sich der (im Bild punktierten) Hyperbel FN mit der Gleichung

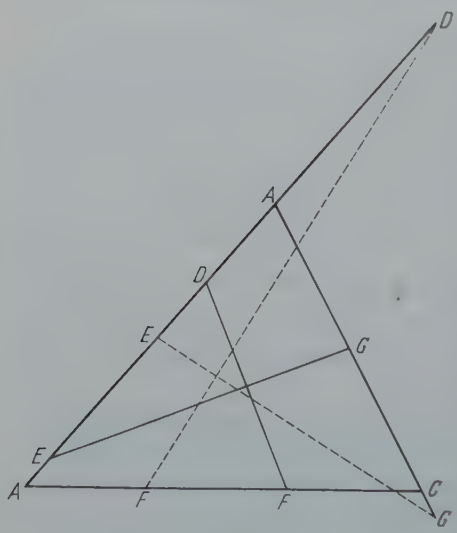

Abb. 4

$$(2.13) \qquad \xi\eta = \frac{a\,n}{2}\,[= \triangle],$$

wobei er

$$(2.14) \quad \xi^2 = x^2 - \frac{a\,e}{2}, \qquad \eta^2 = y^2 - \frac{a\,d}{2}$$

nach dem Pythagoreischen Lehrsatz bestimmt. Er nimmt d und e als positiv an, beschränkt sich also auf spitzwinklige Dreiecke.

Besonders interessant ist eine am Ende dieser Aufzeichnungen ohne nähere Erläuterung gegebene und sehr sorgfältig ausgeführte Figur (Abb. 4), die zwei

Lösungen des Problems an einem spitzwinkligen Dreieck zeigen will. Beim Nachkonstruieren ergibt sich jedoch — dies ist in der Huygens-Ausgabe nicht beachtet —, daß nur die ausgezogenen Linien DF, EG und die gerissene Linie EG das Dreieck ABC halbieren, nicht aber die gerissene Linie DF. Gl. (2.7) ist nämlich darauf beschränkt, daß sich D und E auf der Dreieckseite AB selbst befinden und nicht auf einer ihrer Verlängerungen. Sie kann daher nicht auf den außerhalb des Dreiecks liegenden Abschnitt AD angewendet werden, wie das ersichtlich von Huygens versucht worden war.

3. Aus diesen Aufzeichnungen geht hervor, daß Huygens das Problem der Quadrisectio weitgehend durchgedacht und viele Vorarbeiten für eine spätere Veröffentlichung über diesen Gegenstand getroffen hatte. Dazu ist es jedoch nicht gekommen, und zwar durch eine Unbedachtheit von Huygens. Dieser war nämlich im September 1686 von dem jungen Schweizer N. Fatio de Duillier besucht worden, der sich damals gerade auf dem Wege nach England befand, hatte an dem Gast Gefallen gefunden und sich mit diesem bei einem erneuten Besuch im März 1687 eingehend über verschiedene mathematische Fragen unterhalten. Damals mag wohl auch die Quadrisectio berührt worden sein, auf die Fatio womöglich auch in Paris hingewiesen worden sein mag — als ein bisher noch nicht völlig gelöstes und ziemlich schwieriges Problem. Davon muß Fatio seinem Basler Freund Jak. Bernoulli Mitteilung gemacht haben, und zwar mit der zusätzlichen unrichtigen Bemerkung, Huygens habe die Lösung auf eine Gleichung von höherem als dem 40. Grad zurückgeführt. Das schließen wir aus einer Andeutung, die Bernoulli in einem Brief an Fatio vom 2. 10. 1700 einfließen läßt[8]).

Mag nun diese Bemerkung oder ein anderer Hinweis der Anlaß für Bernoulli gewesen sein, sich eingehender mit der Fragestellung zu befassen: Auf jeden Fall finden wir in seinem Tagebuch, den *Meditationes et annotationes*[9]), einen vom Druck[1]) nur wenig abweichenden Entwurf. Gleich zu Beginn des Textes weist Bernoulli auf Huygens hin, ohne ihn jedoch mit Namen zu nennen[10]). Er schickt dem eigentlichen Text vier Hilfssätze voraus:

1. *Jede der beiden viertelnden Strecken halbiert für sich das Dreieck.*

2. *Keine der Teillinien in einem Dreieck mit ungleichen Seiten kann durch eine Ecke gehen.*

---

[8]) Dieser bisher noch nicht veröffentlichte Brief war mir dank der Liebenswürdigkeit von Herrn O. Spiess-Basel in Abschrift zugänglich. Infolge eines Schreibversehens wird das Datum dieses Briefes in J. E. Hofmann: *Über Jak. Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Genf 1957 = Monographies de l'Enseignement math. Nr. 3, Anm. 75, wo diese Anlegenheit kurz gestreift wird, unrichtig mit 2. 5. 1700 angegeben.

[9]) Mskr. LI a 3 der Basler Universitätsbibliothek, Artikel 108. Auch dieses Ms. konnte ich auf Grund des Entgegenkommens von Herrn Spiess in Abschrift verwenden.

[10]) Ich gebe den Wortlaut nach den *Opera*[1]), 328 wieder: *Problema hocce, quod summum hujus aevi Mathematicum non ita pridem occupatum tenuit, tam parum ex voto eidem successisse audio, ut ultra quadragesimam potestatem, si bene memini, et credere fast est, assurrexerit.* Vielleicht ist *quadragesimam*. Schreibfehler und sollte durch *quartam* ersetzt werden. Wäre dem so, dann hätte alles seine Richtigkeit. (Zusatz bei der Korrektur.)

3. *Keine der Teillinien in einem Dreieck mit ungleichen Seiten kann zu einer Dreieckseite parallel oder senkrecht liegen.*

4. *Es ist nicht möglich, daß sich die Endpunkte der Teillinien auf zwei Dreieckseiten allein verteilen (so daß auf der dritten Seite kein Endpunkt liegt). Jene Seite, auf der sich zwei der Endpunkte befinden, ist niemals die längste.*

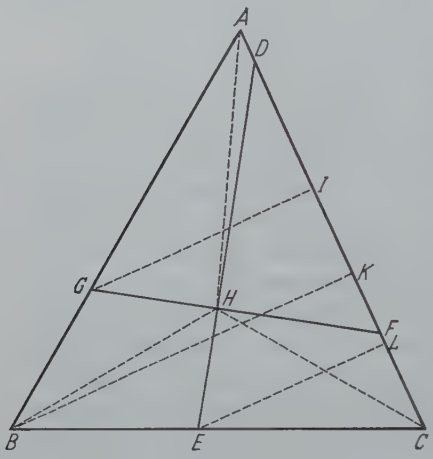

Abb. 5

Die Analysis des Problems schließt an drei gleichartig behandelte Figuren an, die sich nur durch die Gestalt des Dreiecks unterscheiden. Die Seite, auf der sich die beiden Teilpunkte D und F befinden, ist AC und liegt schräg. Im ersten Fall (Abb. 5) sind die Winkel bei A und C spitz, im zweiten Fall ist der bei C und im dritten Fall der bei A stumpf.

Auch BERNOULLI geht bei Herleitung der kennzeichnenden Gleichungen rein geometrisch vor, verwendet jedoch andere Hilfslinien als HUYGENS, nämlich die Lote aus E, B, G auf AC und die Strecken AH, BH, CH. Mit $AC = a$, $KB = d$, $KC = e$, $KA = f$, $CD = x$, $AF = y$ sieht seine Rechnung in verkürzter Form so aus:

$$(3.1)\quad \frac{\triangle BEH}{\triangle ECH} = \frac{BE}{EC} = \frac{KB - EL}{EL} = \frac{KB \times AD - EL \times AD}{EL \times AD} = \frac{\frac{x}{a}\cdot\frac{ad}{2} - \frac{ad}{4}}{\frac{ad}{4}} = \frac{2x - a}{a}$$

und

$$(3.2)\quad \triangle ECH = \triangle DEC - \triangle DHC = \frac{ad}{4} - \frac{ad}{8}\cdot\frac{x}{x + y - a} = \frac{x + 2y - 2a}{x + y - a}\cdot\frac{ad}{8},$$

also

$$(3.3)\quad \begin{cases} \triangle BEH = \dfrac{(2x - a)(x + 2y - 2a)d}{8(x + y - a)} \\ \text{und entsprechend} \\ \triangle BGH = \dfrac{(2y - a)(2x + y - 2a)d}{8(x + y - a)}. \end{cases}$$

Nun ist aber $\triangle BEH + \triangle BGH = \frac{1}{4}\cdot\triangle ABC = \frac{ad}{8}$; also entsteht durch Einsetzen wiederum Gl. (2.7). Die Orthogonalitätsbedingung ergibt sich dann aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FGI und EDL vermöge $GI : IF = DL : EL$ nach leichter Umformung aus

$$(3.4)\quad y^2 = \frac{1}{2}\cdot af + \frac{a^2d^2}{4x^2 - 2ae},$$

d.h. im Grunde genau so wie in (2.11). Im Gegensatz zu HUYGENS beachtet jedoch BERNOULLI eingehend die für e und f möglichen Vorzeichen. Schließlich

entfernt er y aus (3.4) und (2.7) und erhält eine umfängliche Gleichung 8. Grades — ein Ergebnis, um das natürlich dem Gedanken nach auch HUYGENS wußte, wenn er es auch nicht ausdrücklich hingeschrieben hat.

Neu ist hingegen die zweckmäßige Annahme $AD = p$, $DF = z$, $FC = q$, mittels deren (2.7) zu

$$z = p + q + \sqrt{2p^2 + 2q^2} \tag{3.5}$$

wird. Mit $p = q$ erhält BERNOULLI das uns schon bekannte Ergebnis von MAUBUISSON, ohne jedoch dessen Namen zu nennen oder auf ihn anzuspielen — wahrscheinlich wußte er nichts davon. Nun führt er die rationalen Fälle $p = 1$, $q = 7$ bzw. 7 und 17 bzw. 7 und 23 an. Im Grunde kennt er also die vermöge

$$\left\{\begin{array}{l|l} p = u^2 + 2uv - v^2 & a = p + q + z = 2(3u^2 - v^2), \\ q = u^2 - 2uv - v^2 & x = p + z = 5u^2 + 2uv - v^2, \\ z = 4u^2 & y = q + z = 5u^2 - 2uv - v^2 \end{array}\right. \tag{3.6}$$

entstehenden rationalen Lösungen von (2.7).

Anschließend zeigt BERNOULLI durch eine leichte, jedoch etwas langwierige Rechnung, daß wirklich die Dreieckseite, die zwei Endpunkte der Teilenden Geraden trägt, nicht die längste ist, und daß die fragliche Dreieckseite im stumpfwinkligen Dreieck die mittlere sein muß.

Bei späterer Gelegenheit kommt BERNOULLI noch zweimal auf die Quadrisectio zurück, nämlich in den *Notae et animadversiones tumultuariae in Geometriam Cartesii*, die der 4. lateinischen Ausgabe[11]) der Descartesschen *Géométrie*[12]) beigegeben und auch in den *Opera* II abgedruckt sind[13]). In der Note 2 zu Buch I der *Geometria*[14]) führt BERNOULLI die Herstellung der Lösungen auf den Durchschnitt der durch (2.7) und (2.11) gegebenen Kurven zurück, wiederholt also nichtsahnend das von HUYGENS eingeschlagene Verfahren; in der Note 13 zu Buch III der *Geometria*[15]) wird das Problem mit dem Durchschnitt zweier passender Kurven 3. Ordnung in Verbindung gebracht.

4. EULER will fast 100 Jahre später in den beiden zur nämlichen Zeit in der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlungen[2]) die Untersuchungen BERNOULLIS durch eine eingehendere Determination ergänzen. Leider

[11]) Frankfurt a.M. 1695. Die erste lateinische Ausgabe mit den Kommentaren von FR. VAN SCHOOTEN erschien Leiden 1649, die zweite (nunmehr stark vermehrte) Ausgabe mit interessanten Zusätzen des Schooten-Kreises Amsterdam 1659/61, die dritte — im wesentlichen ein unveränderter Nachdruck der zweiten unter Erhaltung der Seitenzahlen, Amsterdam 1683.

[12]) Erstausgabe als Anhang zum *Cours de la méthode*, Leiden 1637, Faksimile-Ausgabe mit der englischen Übersetzung von D. E. SMITH-M. L. LATHAM, New York 1925, ²1954.

[13]) Genf 1744 wie I[1]), und zwar mit durchlaufender Paginierung.

[14]) JAK. BERNOULLI, *Opera* II, 671—674 = DESCARTES[4] 1695[11]), Note 2: *Non semper necesse est, ad constructionem, omnes Problematis aequationes indeterminatas ad unam determinatam reducere: sed praestat quandoque Problema conficere per Loca quae suppeditant indeterminatae aequationes.*

[15]) ebda 689—690 = DESCARTES ebda, Note 13: *De simplicissima Problematis construendi ratione.*

verwendet er jedesmal verschiedene Bezeichnungen, so daß es ohne größere Umschweife nicht gut möglich ist, seine eigene Schreibweise wiederzugeben. Sein Ansatz ist nicht mehr geometrisch, sondern rein rechnerisch und wird durch Heranziehen trigonometrischer Funktionen sehr übersichtlich. Indem EULER die Fläche $\triangle$ eines Dreiecks (wie ABC) als gegeben ansieht, kann er eine Seite (z.B. c) aus den Cotangenten der anliegenden Winkel (hier α und β) in der Form

$$c = \sqrt{2\triangle(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cot}\beta)} \tag{4.1}$$

ausdrücken. In der ersten Abhandlung geht es um die aus $x+y=a+z$ hervorgehende Beziehung. EULER sieht das Auftreten von drei Lösungen am gleichseitigen Dreieck, deren jede aus einer Höhe und einer Seitenparallelen besteht, als ein isoliertes Vorkommnis an. Berichtigend bemerkt er in der zweiten Abhandlung, Entsprechendes sei auch für gleichschenklige und für Dreiecke ohne gleiche Seiten möglich, doch sei im letzten Fall nur eine geringfügige Abweichung vom gleichseitigen Dreieck vorhanden. Er bedient sich einer inhomogenen rationalisierenden Darstellung der Stücke x, y, z, die aus jener von (3.6) mit $u=\frac{1}{2}$, also $z=1$ hervorgeht. Da nun weder p noch q negativ werden dürfen, ist

$$0 \leqq |v| \leqq \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}207. \tag{4.2}$$

Deshalb ist es sinnvoll, aus einer nach Hundertsteln von v fortschreitenden Tabelle eine Übersicht über die entsprechend zusammengehörigen Werte von x und y zu geben.

Nun geht es darum, die Huygens-Bernoullische Gl. (2.11) trigonometrisch auszudrücken. Sie ist ja gleichwertig mit

$$(x^2 - \triangle \cdot \operatorname{cotg}\alpha)(y^2 - \triangle \cdot \operatorname{cot}\beta) = \triangle^2, \tag{4.3}$$

wobei

$$\triangle = \frac{(x+y-1)^2}{2(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)} = \frac{x^2+y^2-2}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}. \tag{4.4}$$

Der rechte Ausdruck ergibt sich unmittelbar aus (2.7), wenn wir $a=x+y-1$ setzen. Führen wir nunmehr mit EULER noch die Hilfsgrößen

$$\mu = y^2 - 1, \quad \nu = x^2 - 1 \tag{4.5}$$

ein, dann geht (4.3) über in[16])

$$(1-\mu^2)\operatorname{cotg}^2\alpha + 2(1+\mu\nu)\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta + (1-\nu^2)\operatorname{cotg}^2\beta = (\mu+\nu)^2. \tag{4.6}$$

[16]) EULER formt nicht die Gleichungen (3.4) bzw. (4.3) um, sondern beginnt mit dem System

$$x^2 = \triangle \cdot (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi), \quad (x+y-1)^2 = 2\triangle \cdot (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta),$$
$$y^2 = \triangle \cdot (\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\varphi), \quad 1 = \tfrac{1}{2}\triangle \cdot (\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi),$$

wobei $\varphi = \ldots$ TED (Abb. 2). Er berechnet zunächst $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$ aus $\operatorname{cotg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$, indem er $\triangle$ entfernt, dann $\operatorname{cotg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ aus $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$ und setzt das Produkt der erhaltenen Ausdrücke gleich 1. Ob er (als blinder Mann!) von seinen Helfern hinreichend deutlich auf die Gleichung (3.4) hingewiesen wurde, aus der sich alles ohne Rückgang auf das Gleichungssystem entwickeln läßt, steht dahin.

Nun ergeben sich die folgenden Entsprechungen:

v	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	0	$+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
x	1	$\frac{5}{4}$	2
y	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	1
μ	1	$\frac{9}{16}$	0
ν	0	$\frac{9}{16}$	1

und zwar nehmen x und ν im Existenzbereich (4.2) mit zunehmendem v stetig zu, hingegen y und μ stetig ab.

Jetzt wendet sich EULER, ausgehend vom Fall des gleichseitigen Dreiecks, zu jenen gleichschenkligen Dreiecken, bei denen die Quadrisectio aus drei verschiedenen Lösungen besteht; die eine wird von der Höhe auf die Grundlinie und einer Parallelen zu dieser gebildet, während die anderen beiden Lösungen zwei Geradenpaare enthalten, von denen die Grundlinie in je zwei Punkten geschnitten wird. Diese Lösungen gehen durch Spiegeln an der Höhe auf die Grundlinie ineinander über.

Nun ergibt sich z.B. aus (4.6)

$$(4.7)\qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\mu+\nu}{\sqrt{4-(\mu-\nu)^2}} = \frac{x^2+y^2-2}{\sqrt{4-(x^2-y^2)^2}} = \frac{\left(\frac{3}{4}-v^2\right)^2}{\sqrt{(1-4v^2)\left(1-\frac{9v^2}{4}+v^4\right)}}.$$

Ist hier $v=0$, dann ist $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{9}{16}$, also $\alpha_0=60°38'33''$. Erteilen wir hier der Einheit z den Wert 12, dann ist $p=q=3$, $x=y=15$, und die in (2.11) mit n bezeichnete Dreieckshöhe ist alsdann gleich 16. Das ist der schon von MAUBUISSON aufgefundene Fall für das gleichschenklige Dreieck. Mit $v=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ erhalten wir $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, also ein gleichseitiges Dreieck. Da nun $|v|$ klein ist, entsteht die Potenzentwicklung[17])

$$(4.8)\qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{9}{16}\cdot\left(1+\frac{11}{3\cdot 8}\cdot v^2+\frac{3\cdot 509}{9\cdot 128}\cdot v^4+\cdots\right).$$

Daraus geht hervor, daß $|\alpha|$ von α_0 bis 60° abnimmt, wenn $|v|$ von 0 bis zu $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ zunimmt. Ist nun (Abb. 2) $\sphericalangle TED=\varphi$, dann ist

$$(4.9)\qquad \triangle = 2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi = \sin 2\varphi = \frac{x^2+y^2-2}{2\cdot\operatorname{cotg}\alpha} = \sqrt{(1-4v^2)\left(1-\frac{9}{4}\cdot v^2+v^4\right)},$$

[17]) Natürlich läßt sich aus (4.7) vermittels $\cos 2\alpha = (\operatorname{cotg}^2\alpha-1):(\operatorname{cotg}^2\alpha+1)$ auch ein in v^2 rationaler Ausdruck zur Bestimmung von $\cos 2\alpha$ erhalten, aber dieses Vorgehen hat keinen besonderen Rechenvorteil für sich.

also[18])

$$\cos 2\varphi = \tfrac{5}{2} \cdot v - 2v^3. \tag{4.10}$$

Folglich gehört zu $v = 0$ der Winkel $\varphi = 45°$ und zu $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ der Winkel $|\varphi| = 30°$.

Alsdann geht EULER auf die Möglichkeit ein, die Vierteilung eines gleichschenkligen Dreiecks so durchzuführen, daß zwei Ausgangspunkte der Teillinien auf einem der Schenkel liegen. Auch auf diesem Wege erhält er drei Lösungen, nämlich zwei zur Höhe auf die Grundlinie des Dreiecks spiegelgleiche und eine dritte, die aus dieser Höhe und einer Parallelen zur Grundlinie besteht. Dieser Fall ergibt sich z.B., wenn zu (4.6) noch die aus $x = \sqrt{2}$, $y = 1$, also $\mu = 0$, $\nu = 1$ entstehende Gleichung

$$\operatorname{cotg}^2\alpha + 2 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta = 1 \tag{4.11}$$

hinzutritt. Jetzt ist $z = y$; $\alpha = \gamma$ sind die Basiswinkel, $\beta = 180° - 2\alpha$ ist der Winkel an der Spitze. Damit bricht EULER ab und wendet sich zum Fall $x = y = \frac{5}{4}$, d.h. zum Sonderfall von MAUBUISSON, den er an Hand der aus (4.6) hervorgehenden Gleichung

$$175 \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha + 2 \cdot 337 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta + 175 \cdot \operatorname{cotg}^2\beta = 324 \tag{4.12}$$

eingehend diskutiert. Dabei bedient er sich der rationalisierenden Substitution

$$\operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cotg}\beta : 1 = (25 + 7w^2) : (25w^2 - 7) : 32w \tag{4.13}$$

und zeigt an Hand tabellarischer Übersichten, die durch Näherungsentwicklungen zustande kommen, wie man bei Dreiecken, die nur wenig von der Form des gleichseitigen abweichen, zu Lösungen vordringen kann.

5. Keiner der bisherigen Autoren hat bemerkt, daß sich die Vierteilung sehr einfach auch durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal behandeln läßt. Abb. 6 lehrt zunächst, wie wir im Anschluß an (3.5) die Verteilung der Punkte A, D, E, B auf der doppelt getroffenen Dreieckseite gewinnen: Wir beginnen mit dem rechtwinkligen Dreieck SUV aus den Katheten $US = p + q$ und $SV = p - q$; dann ist also $UV = \sqrt{(p+q)^2 + (p-q)^2} = \sqrt{2(p^2+q^2)} = z - p - q$. Hierauf machen wir auf der verlängerten UV der Reihe nach $AD = p$, $DU = q$, $VE = p$, $EB = q$. Jetzt sind die vier Punkte A, D, E, B „richtig" verteilt. Indem wir diese Verteilung durch Maßstabveränderung übertragen, können wir jede beliebige Strecke AB gemäß (3.5) unterteilen.

Nun wählen wir auf dem Halbkreis über Durchmesser DE einen Punkt T und ergänzen zur Raute $DEPQ = 4 \cdot \triangle DET$. Schneiden wir alsdann QT

[18]) Diese einfache Beziehung ist EULER entgangen, der aus den in Anmerkung 16 entwickelten Formeln zu der Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg}\varphi = 1 - \frac{5}{2} \cdot v + \frac{25}{8} \cdot v^2 - \frac{93}{16} \cdot v^3 + \frac{1235}{128} \cdot v^4 + \cdots$$

gelangt.

mit der Parallelen zu AQ durch D in G und TP mit der Parallelen zu BP durch E in F, dann schneiden sich AG und BF so in C, daß das entstehende Dreieck ABC von EG und DF geviertelt wird. Den ganz einfachen Beweis kann ich wohl übergehen.

Hier ist also

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} DF : 2 \cdot DT = DF : DP = DE : DB = z : y, \\ EG : 2 \cdot ET = EG : EQ = DE : AE = z : x. \end{cases}$$

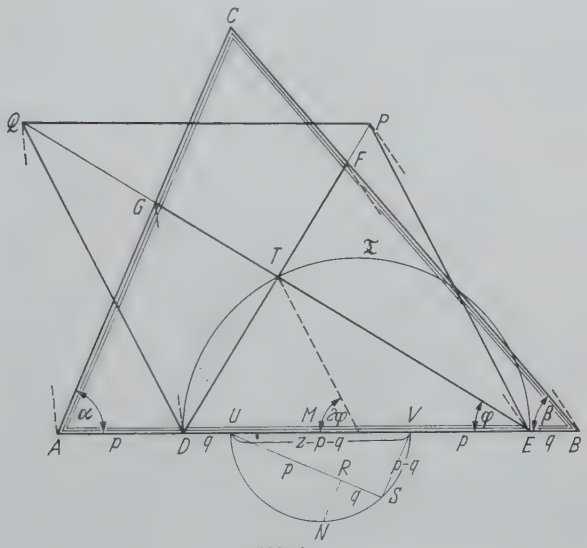

Abb. 6

Außerdem ist

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} TF : DT = (2z - y) : y, \\ TG : ET = (2z - x) : x. \end{cases}$$

Also schneiden sich die viertelnden Linien der sämtlichen möglichen Dreiecke ABC mit der nämlichen „richtigen" Verteilung der Punkte A, D, E, B in den nämlichen konstanten Verhältnissen; folglich sind alle diese Dreiecke zueinander affin.

Während nun T auf dem Halbkreis über DE wandert, bewegen sich F und G auf Halbkreisen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Aus (5.1) folgt nach leichter Rechnung

$$\text{(5.3)} \qquad DF = \frac{2z^2 \cdot \sin\varphi}{y}, \qquad EG = \frac{2z^2 \cdot \cos\varphi}{x},$$

also

$$\text{(5.4)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x^2 - z^2 - z^2 \cdot \cos 2\varphi}{z^2 \cdot \sin 2\varphi}, \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{y^2 - z^2 + z^2 \cdot \cos 2\varphi}{z^2 \cdot \sin 2\varphi}.$$

Weiterhin ergibt sich die Höhe n des Punktes C über AB aus $2 \cdot \triangle : a$ als

$$\text{(5.5)} \qquad n = \frac{2z^2 \cdot \sin 2\varphi}{a}.$$

Also hat diese Höhe von A den Abstand

$$n \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2(x^2 - z^2)}{a} - \frac{2z^2 \cdot \cos 2\varphi}{a}. \tag{5.6}$$

Folglich wandert auch C auf einem Halbkreis $\mathfrak{C}$ mit dem Mittelpunkt auf AB, während T den Halbkreis $\mathfrak{T}$ über DE durchläuft.

In Abb. 7 sind die bisherigen Ergebnisse zusammengefaßt: über DE liegt das Quadrat DEP_0Q_0 und auf dessen Diagonalen das Punktepaar F_0, G_0; so entsteht schließlich das Dreieck ABC_0, dessen viertelnde Linien die Grundlinie AB jeweils unter 45° schneiden. Senkrecht unter C_0, F_0, G_0 liegen die Mittelpunkte M_c, M_f, M_g der Halbkreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, auf denen die Punkte C, F, G

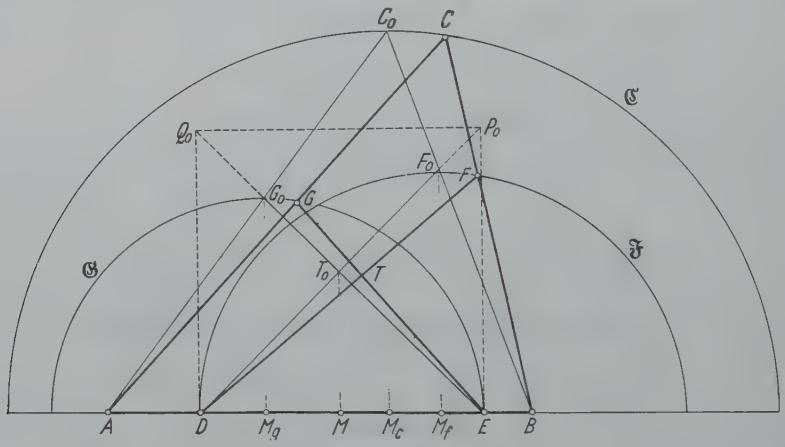

Abb. 7

wandern. Wählen wir irgendeine zulässige Lage des Punktes C, dann liegt F im Schnitt von $\mathfrak{F}$ mit BC und G im Schnitt von $\mathfrak{G}$ mit AC und DF, EG sind die gesuchten viertelnden Linien.

Soll nun Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C sein, dann liegt C im Schnitt von $\mathfrak{C}$ mit dem Mittellot zu AB. Soll die Spitze A sein, dann muß $\mathfrak{C}$ mit dem Kreis um A durch B geschnitten werden. Im Sonderfall von MAUBUISSON (und nur in diesem) ist $M = M_c$ gleichzeitig Mittelpunkt von AB und DE.

In geistreicher Weise zeigt Herr SPEISER wie folgt[19]), daß das Problem stets eine ungerade Anzahl von Lösungen hat: Er bemerkt, daß innerhalb eines gegebenen Dreiecks ABC in jeder Richtung zwei zueinander senkrechte Strecken existieren, die das Dreieck halbieren und sich in seinem Innern schneiden. Werden die vier Teilflächen der Reihe nach z.B. im positiven Drehsinn mit f_1, f_2, f_3, f_4 bezeichnet, dann ist sicher

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 = \tfrac{1}{2} \cdot \triangle; \quad f_2 + f_3 = f_4 + f_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \triangle, \tag{5.7}$$

also

$$f_1 = f_3, \quad f_2 = f_4. \tag{5.8}$$

[19]) EULER, *Opera*[2]), XXXI.

Somit sind die nicht aneinander liegenden Teilflächen gleichgroß. Nun geht das Verhältnis $f_1 : f_2$ zweier benachbarter Teilflächen durch Drehen der Ausgangsrichtung um 90° über in seinen reziproken Wert. Wird die Anfangsrichtung so gewählt, daß $f_1 > f_2$, dann ist nach der Drehung $f_1 < f_2$. Folglich muß es — da es sich um eine stetige Veränderung handelt — mindestens eine Zwischenlage geben, für die $f_1 = f_2$. Alsdann ist die Vierteilung erreicht. Gibt es mehrere lösende Zwischenlagen, so sind auch doppelt zählende Lösungen möglich. Dies tritt nur dann ein, wenn die äußeren Abschnitte der Teilpunkte gleichlang sind (Fall von MAUBUISSON). Die Höchstzahl von Lösungsmöglichkeiten ist — wie wir nachher sehen werden — gleich drei. Sie wird z.B. beim gleichseitigen Dreieck erreicht, ferner in den von EULER angegebenen Fällen von gleichschenkligen Dreiecken.

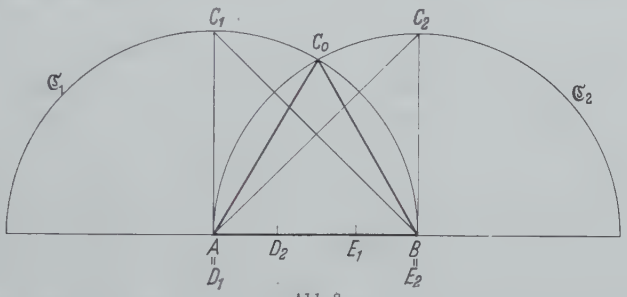

Abb. 8

An Abb. 7 läßt sich außerdem die Konstruktion von Dreiecken ungleicher Seitenlänge ABC anschließen, bei denen sicherlich drei Lösungen vorhanden sind. Wir geben nämlich auf der Strecke AB zwei verschiedene Punktepaare D_1, E_1 und D_2, E_2 derart, daß jedesmal A, D, E, B eine „richtige" Verteilung ist. Dann konstruieren wir die zu jeder dieser Verteilungen gehörenden Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Sie schneiden sich stets in genau einem Punkt C. Das erkennen wir so:

Wir konstruieren auf AB die den Extremwerten $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ im Sinne der Eulerschen Parameterform entsprechenden Verteilungen. Die zugehörigen Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ schneiden sich nunmehr (Abb. 8) so auf dem Mittellot zu AB, daß das gleichseitige Dreieck ABC_0 entsteht. Lassen wir den Teilpunkt D stetig von D_1 bis D_2, d.h. innerhalb des Existenzbereiches wandern, dann bewegt sich auch E stetig von E_1 bis E_2. Auch der zur Verteilung D, E gehörige Halbkreis $\mathfrak{C}$ wird stetig verändert, und zwar so, daß er eine Kurve mit ziemlich verwickelter Gleichung umhüllt. Diese Kurve hat das Mittellot von AB zur Symmetrieachse und geht mit waagrechter Tangente durch C_0. Machen wir diesen Punkt zum Ursprung, die waagrechte Tangente zur X-Achse und das nach oben weisende Stück des Mittellotes von AB zur positiven Y-Achse eines cartesischen Koordinatensystems, dann wird die Einhüllende der Halbkreise in der Nähe von C_0 durch einen Bogen des Kreises

$$x^2 + \left(y - \frac{11a}{72}\right)^2 = \left(\frac{11a}{72}\right)^2 \tag{5.9}$$

angenähert. Daraus läßt sich entnehmen, daß sich zumindest für absolut kleine v je zwei verschiedene der zugehörigen Halbkreise in genau einem Punkt schneiden. Diese Eigenschaft bleibt bis zu den Extremwerten $|v| = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ des Existenzbereiches erhalten; so stehen z.B. die Halbkreise $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ der Abb. 8 vom Mittelpunkt des Kreises (5.9) um $\frac{11{,}19a}{72}$ statt um $\frac{11a}{72}$ ab. Der Kreis (5.9) ist Scheitelkreis der Eingehüllten und wird von dieser in der Nähe von C_0 umschlossen. Ist nun C Schnitt irgend zweier Kreise $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ innerhalb des Existenzbereiches, dann geht durch ihn kein weiterer Halbkreis des Kreissystems; folglich gibt es bei Auftreten mehrerer Vierteilungen innerhalb eines Dreiecks höchstens zwei dieser Vierteilungen so, daß je zwei der Endpunkte auf einer und der nämlichen Dreieckseite liegen. Nun dürfen aber im Dreieck ohne gleiche Seiten gemäß dem Ergebnis von Bernoulli auf der längsten Seite keine zwei Endpunkte der vierteilenden Linien liegen; folglich müssen sich auf einer der beiden anderen Seiten je zwei Endpunkte von zwei Lösungen befinden, und Dreiecke dieser Art werden gemäß der obigen Konstruktion gefunden. Auf der letzten Dreieckseite gibt es jedoch nur einmal zwei Endpunkte einer einzigen weiteren Lösung; denn die Lösungszahl sollte ja ungerade sein. Somit gibt es in passenden Dreiecken ungleicher Seitenlänge höchstens drei voneinander verschiedene Lösungen des Vierteilungsproblems, und Dreiecke dieser Art — das geht nun unmittelbar aus unserer Konstruktion hervor — weichen von ihrer Form nur verhältnismäßig wenig von den gleichseitigen Dreiecken ab.

Das hier Vorgebrachte kann also als konstruktive Ergänzung dessen dienen, was Euler mit seinen Näherungen geleistet hat.

(13b) Ichenhausen/Günzburg, Heinrich Sinz-Str. 15

(Eingegangen am 16. November 1959)

PICONE, M.
Math. Zeitschr. 74, 119–128 (1960)

Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm

Nota dedicata a ERICH KAMKE

Di
MAURO PICONE

Siano: A un insieme chiuso di punti di uno spazio euclideo a p dimensioni, i cui punti saranno indicati, indifferentemente, con x e y e le coordinate *reali* di questi rispettivamente con $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e $y_1, y_2, \ldots, y_p$;

B un insieme chiuso di punti di uno spazio euclideo a $2q$ dimensioni, il cui punto sarà indicato con u e le coordinate *complesse* di questo con $u_1, u_2, \ldots, u_q$;

$f(x)$ e $K(x, y, u)$ due vettori assegnati, a q componenti complesse, il primo funzione di x, continua in A, ed il secondo funzione del punto (x, y, u) continua in $A \times A \times B$;

$C(A, B)$ la classe dei vettori a q componenti complesse, funzioni del punto x, continue in A e aventi coinsieme contenuto in B.

Sono ben noti i due teoremi seguenti.

I. *L'insieme A sia limitato ed esista un numero reale Λ tale da aversi, comunque si assumano i due punti (x, y, u) e (x, y, u') di $A \times A \times B$*

$$|K(x, y, u) - K(x, y, u')| \leqq \Lambda |u - u'| \quad (1)$$

[1]).

Se

$$\Lambda \operatorname{mis} A < 1, \quad (2)$$

ed esiste una funzione $u^{(0)}(x)$, della classe $C(A, B)$, tale che appartengano alla stessa classe tutte quelle successivamente definite dalle eguaglianze[2])

$$\left\{\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)]\, \mathrm{d}y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u^{(n+1)}(x) &= f(x) + \int_A K[x, y, u^{(n)}(y)]\, \mathrm{d}y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right. \quad (3)$$

l'equazione integrale

$$u(x) = f(x) + \int_A K[x, y, u(y)]\, \mathrm{d}y, \quad (4)$$

[1]) Indicando con una lettera a una matrice, in particolare un vettore, col simbolo $|a|$ ne denoterò il *modulo* (detto anche *norma*) in una determinata e sempre mantenuta qualsivoglia definizione dell'ordinaria analisi matriciale, per esempio, in una delle definizioni contemplate da FROBENIUS.

[2]) In particolare, se B é tutto lo spazio complesso a $2q$ dimensioni, ciò non impone alcuna condizione né a $u^{(0)}(x)$ né a $f(x)$.

nella funzione incognita $u(x)$, possiede una ed una sola soluzione della classe $C(A, B)$, risultando

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in A, ed ivi

$$|u(x) - u^{(0)}(x)| \leqq \frac{U}{1 - \Lambda \operatorname{mis} A},$$

avendo indicato con U un numero non superato, in A, dalla funzione

$$\left| f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)]\, \mathrm{d}y - u^{(0)}(x) \right|. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda \int_A |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)|\, \mathrm{d}y,$$

e quindi

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda^n (\operatorname{mis} A)^{n-1} \int_A |u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x)|\, \mathrm{d}x \leqq (\Lambda \operatorname{mis} A)^n U.$$

Se $u(x)$ e $u'(x)$ sono due soluzioni della (4), di classe $C(A, B)$, detto P un numero non superato, in A, da $|u(x) - u'(x)|$, si ha:

$$|u(x) - u'(x)| \leqq \Lambda \int_A |u(x) - u'(x)|\, \mathrm{d}x \leqq \Lambda P \operatorname{mis} A$$

e quindi, successivamente, per qualsivoglia numero naturale n,

$$|u(x) - u'(x)| \leqq P(\Lambda \operatorname{mis} A)^n.$$

II. *L'insieme A sia di misura finita e sia $H(x, y)$ una matrice quadrata d'ordine q, a elementi complessi, funzione del punto (x, y), continua e limitata in $A \times A$, ove risulti, per un certo numero non negativo M,*

$$|H(x, y)| \leq M.$$

Se

$$M \operatorname{mis} A < 1 \tag{6}$$

e la funzione $f(x)$ è limitata in A, l'equazione integrale, nella funzione incognita $u(x)$,

$$u(x) = f(x) + \int_A H(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y,$$

possiede una ed una sola soluzione continua e limitata in A, e risulta, ivi,

$$|u(x) - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)|\, \mathrm{d}x, \tag{7}$$

e quindi

$$|u(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \operatorname{mis} A},$$

avendo designato con F un numero non superato da $|f(x)|$, in A.

DIMOSTRAZIONE. Per l'n^{mo} nucleo iterato del nucleo $H(x, y)$, si ha

$$|H^{(n)}(x, y)| \leqq M^{n+1}(\text{mis } A)^n$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(x, y)$, ove si é posto $H^{(0)}(x, y) = H(x, y)$, é assolutamente ed uniformemente convergente nell'insieme A, ivi avendosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |H^{(n)}(x, y)| \leqq \frac{M}{1 - M \text{ mis } A}.$$

Scopo preminente di questa nota é di far conoscere un nuovo teorema d'esistenza e d'unicità per la soluzione dell'equazione integrale di FREDHOLM (4), teorema che si fonda sul seguente

LEMMA. *Sia A di misura finita e $H(x, y, u)$ una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u), continua nell'insieme $A \times A \times B$, ove risulta, per un certo numero M, verificante la* (6),

$$|H(x, y, u)| \leqq M. \tag{8}$$

A norma del teorema II, *assegnate, comunque, due funzioni $u(x)$ e $u'(x)$, della classe $C(A, B)$ e due funzioni $f(x)$ e $f'(x)$, continue e limitate in A, esistono due determinate funzioni, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$, continue e limitate in A, per le quali si ha*:

$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \int_A H[x, y, u(y)]\, \varphi(y)\, dy, \\ \varphi'(x) = f'(x) + \int_A H[x, y, u'(y)]\, \varphi'(y)\, dy, \end{cases} \tag{9}$$

risultando

$$|\varphi(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \text{ mis } A}, \qquad |\varphi'(x)| \leqq \frac{F'}{1 - M \text{ mis } A}, \tag{10}$$

supposto che $|f(x)|$ e $|f'(x)|$ non superino, in A, rispettivamente, i numeri F e F'. Ebbene, se, comunque si assumano i punti (x, y, u) e (x, y, u') in $A \times A \times B$, risulta, inoltre, per un certo numero L,

$$|H(x, y, u') - H(x, y, u)| \leqq L|u' - u|, \tag{11}$$

le due funzioni $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ verificheranno la limitazione:

$$\begin{cases} |\varphi'(x) - \varphi(x)| \\ \qquad \leqq |f'(x) - f(x)| + P \int_A |f'(y) - f(y)|\, dy + L\, Q \int_A |u'(y) - u(y)|\, dy, \end{cases} \tag{12}$$

ove

$$P = \frac{M}{1 - M \text{ mis } A}, \qquad Q = \frac{F' + F - |F' - F|}{2(1 - M \text{ mis } A)^2}. \tag{13}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle (9) si ricava l'eguaglianza:

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = f'(x) - f(x) + \int_A \{H[x, y, u'(x)] - H[x, y, u(y)]\}\, \varphi'(y)\, dy + \int_A H[x, y, u(y)]\, \{\varphi'(y) - \varphi(y)\}\, dy,$$

e pertanto che $\varphi'(x) - \varphi(x)$ é soluzione di un'equazione integrale lineare con nucleo $H[x, y, u(y)]$ e termine noto

$$f'(x) - f(x) + \int_A \{H[x, y, u'(y)] - H[x, y, u(y)]\}\, \varphi'(y)\, dy,$$

onde segue, tenendo conto della (7), della seconda delle (10) e dalla (11), la limitazione

$$|\varphi'(x) - \varphi(x)| \leqq |f'(x) - f(x)| + \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f'(y) - f(y)|\, dy + \frac{LF'}{(1 - M \operatorname{mis} A)^2} \int_A |u'(y) - u(y)|\, dy.$$

Se si osserva che sussiste anche la limitazione da questa ottenuta scambiando, simultaneamente $\varphi(x)$ con $\varphi'(x)$ e $f(x)$ con $f'(x)$, risulta dimostrata la (12), con P e Q date dalle (13).

Ne segue il teorema:

III. *L'insieme A sia di misura finita e si abbia, in $A \times A \times B$,*

$$K(x, y, u) \equiv H(x, y, u)\, u,$$

$H(x, y, u)$ designando una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u) continua in $A \times A \times B$, per la quale ivi risulti

$$|H(x, y, u)| \leqq M, \tag{8}$$

e comunque vi si prendano due punti (x, y, u) e (x, y, u')

$$|H(x, y, u') - H(x, y, u)| \leqq L|u' - u|,$$

M e L essendo due numeri non negativi verificanti le limitazioni:

$$M \operatorname{mis} A < 1, \tag{6}$$

$$LF \operatorname{mis} A < (1 - M \operatorname{mis} A)^2, \tag{14}$$

ove F é un numero non superato da $|f(x)|$ in A. Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} u^{(1)}(x) = f(x) + \int_A H[x, y, u^{(0)}(y)]\, u^{(1)}(y)\, dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_A H[x, y, u^{(n)}(y)]\, u^{(n+1)}(y)\, dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{15}$$

appartengono alla classe $C(A, B)$, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4), della stessa classe, limitata in A, avendosi, ivi, uniformemente

$$\lim_{n \to \infty} u^{(n)}(x) = u(x), \tag{16}$$

e la formula di maggiorazione

$$|u(x) - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)| \, dx. \tag{17}$$

DIMOSTRAZIONE. In forza del teorema II, le (15) definiscono le funzioni $u^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, continue in A, ivi verificanti la limitazione:

$$|u^{(n)}(x)| \leqq \frac{F}{1 - M \operatorname{mis} A}. \tag{18}$$

Posto poi $Q = F/(1 - M \operatorname{mis} A)^2$, si ha, in virtù del lemma,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq L\, Q \int_A |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)| \, dy,$$

e quindi, successivamente,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq L\, Q (L\, Q \operatorname{mis} A)^{n-1} \int_A |u^{(1)}(y) - u^{(0)}(y)| \, dy,$$

donde, tenendo conto della (14), la convergenza uniforme, in A, della successione $\{u^{(n)}(x)\}$, verso una funzione $u(x)$ soluzione della (4) verificante la limitazione (17), che é verificata dalle $u^{(n)}(x)$. Il teorema d'unicità é, del pari, conseguenza immediata del lemma e della (14).

OSSERVAZIONI. 1. Nel teorema I, all'ipotesi secondo la quale la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite dalle (3) devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire la seguente.

La funzione $u^{(0)}(x)$ appartiene alla classe $C(A, B)$ e l'insieme $A \times B$ contiene quello definito dalle limitazioni:

$$x \in A, \qquad |u - u^{(0)}(x)| \leqq \frac{\left| f(x) + \int_A K[x, y, u^{(0)}(y)] \, dy - u^{(0)}(x) \right|}{1 - A \operatorname{mis} A}.$$

2. Nel teorema III, all'ipotesi secondo la quale la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni (15) devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire la seguente.

La funzione $u^{(0)}(x)$ appartiene alla classe $C(A, B)$ e l'insieme $A \times B$ contiene quello definito dal verificarsi delle limitazioni:

$$x \in A, \qquad |u - f(x)| \leqq \frac{M}{1 - M \operatorname{mis} A} \int_A |f(x)| \, dx.$$

3. Supposto che l'insieme B sia tutto lo spazio complesso a $2q$ dimensioni, mentre il teorema I assicura l'esistenza della soluzione della (4), nel caso in cui l'insieme A sia limitato, lasciando la funzione $f(x)$ affatto arbitraria, il teorema III, consente a questo insieme di essere illimitato, purché di misura finita, ma impone alla funzione $f(x)$ la limitazione:

$$|f(x)| \leqq F < \frac{(1 - M \operatorname{mis} A)^2}{L \operatorname{mis} A}.$$

4. Nell'esempio offerto dal caso particolare, che andiamo a considerare, é facile fare un istruttivo confronto fra l'ufficio del teorema I e quello del teorema III.

L'insieme A sia un intervallo limitato dell'asse reale x, B l'asse reale u e si consideri l'equazione (4) nel caso particolare in cui si abbia

$$K(x,y,u)\begin{cases}=\varphi(x,y)\,u\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-1+|u|^{\alpha}\right), & \text{per } |u|\geqq 1,\\ =\varphi(x,y)\,u^{n}, & \text{per } |u|\leqq 1,\end{cases}$$

ove $\varphi(x,y)$ designa una funzione reale delle due variabili reali x e y, continua nel quadrato $A\times A$ del piano (x,y), α un numero reale e n un numero naturale dispari.

Il teorema I é, in questo caso, applicabile se

$$\alpha\leqq 0.$$

Potendosi allora porre, detto μ il massimo di $|\varphi(x,y)|$ in $A\times A$

$$A=\mu\,\operatorname{Max}(n,1+|\alpha|),$$

si ha che: *Se risulta*

$$\operatorname{mis} A<\frac{1}{\mu\,\operatorname{Max}(n,1+|\alpha|)}, \tag{19}$$

l'equazione integrale (4) *possiede una ed una sola soluzione comunque si assegni la funzione* $f(x)$ *e, posto, nella* (5), $u^{(0)}(x)\equiv 0$ *si perviene alla formola di maggiorazione:*

$$|u(x)|\leqq\frac{F}{1-\mu\,\operatorname{Max}(n,1+|\alpha|)\operatorname{mis} A}. \tag{20}$$

Se α é positivo il teorema I non é applicabile, lo é il teorema III, se

$$\alpha\leqq 1.$$

Potendosi, allora, porre

$$M=\mu,\qquad L=\mu\,\operatorname{Max}(n-1,|\alpha|),$$

si ha che: *Se risulta*

$$\operatorname{mis} A<\frac{1}{\mu}, \tag{21}$$

l'equazione (4) *possiede una ed una sola soluzione, purché la funzione* $f(x)$ *verifichi la limitazione*

$$|f(x)|\leqq F<\frac{(1-\mu\operatorname{mis} A)^2}{\mu\,\operatorname{Max}(n-1,|\alpha|)\operatorname{mis} A} \tag{22}$$

e sussiste la formola di maggiorazione:

$$|u(x)|\leqq\frac{F}{1-\mu\operatorname{mis} A}. \tag{23}$$

Per $\alpha\leqq 0$ sono applicabili entrambi i teoremi I e III, ma, mentre il primo impone alla misura dell'intervallo A la limitazione (19), il terzo consente, a norma della (21), di moltiplicare tale misura per il numero $\operatorname{Max}(n,1+|\alpha|)$, che può essere grandissimo, dipendentemente dalla grandezza di n e di $|\alpha|$, purché la funzione $f(x)$ verifichi la limitazione (22) ed allora, la formola di maggiorazione (20) può sostituirsi con la più ristretta (23).

Fissato n, l'equazione limite della (4) per $\alpha \to -\infty$, ha il nucleo discontinuo

$$K(x, y, u) \begin{cases} = \varphi(x, y)\, u \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), & \text{per } |u| > 1, \\ = \varphi(x, y)\, u^n, & \text{per } |u| \leqq 1, \end{cases}$$

e ad una tale equazione non si applica né il teor. I, né il teor. III. La (19) darebbe al limite, mis $A \leqq 0$ e, per mis $A = 0$, indicato con a il punto in cui degenera l'intervallo A, l'equazione limite della (4) possiede l'unica soluzione $u(x) = f(a)$; la (22) darebbe, al limite, $|f(x)| \leqq F \leqq 0$ e, per $f(x) \equiv 0$, l'equazione limite della (4), possiede, conformemente alla (23), la soluzione $u(x) \equiv 0$.

5. Caso dell'equazione integrale di Volterra. Forse conviene osservare, come vado a fare brevemente, anche taluni teoremi, secondo i quali si estendono alle equazioni integrali non lineari, di seconda specie, di Volterra, con integrazione p-dimensionale, quelli considerati in una mia nota, attualmente in corso di stampa[3]), per le stesse equazioni con integrazione unidimensionale.

E'utile, a tale scopo, introdurre le locuzioni e notazioni seguenti. Presi due punti $x(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ e $y(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ dello spazio a p dimensioni, dico che y *non é superiore a* x e scrivo $y \leqq x$, se é $y_k \leqq x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Preso un punto x dello spazio, indico con $R(x)$ l'insieme luogo dei punti non superiori a x, e, se il punto y non é superiore a x, con $R(x, y)$, l'insieme luogo dei punti non superiori a x e non inferiori a y. Per un insieme A di punti dello spazio indico poi con $A(x)$ e $A(x, y)$, supposto $y \leqq x$, rispettivamente gl'insiemi, eventualmente vuoti, $A \cap R(x)$, $A \cap R(x, y)$.

Ciò posto, assegnati i vettori $f(x)$ e $K(x, y, u)$ e gli insiemi A e B, già introdotti, vogliamo considerare l'equazione integrale di Volterra:

$$(4_V) \qquad u(x) = f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u(y)]\, \mathrm{d}y, \qquad x \in A,$$

per enunciare i relativi seguenti teoremi d'esistenza e d'unicità, brevemente accennando alle loro dimostrazioni.

IV. *Supposto, per ogni punto* x *di* A, *limitato l'insieme* $A(x)$, *se la funzione* $u^{(0)}(x)$ *e tutte quelle successivamente dedotte dalla eguaglianza, per* $x \in A$,

$$u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u^{(n)}(y)]\, \mathrm{d}y \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

sono della classe $C(A, B)$ *e ad ogni punto* τ *di* A, *corrisponde un numero* Λ_τ, *per il quale, comunque si prendano due punti* (x, y, u) e (x, y, u') *di* $A(\tau) \times A(\tau) \times B$, *con* $y \leqq x$, *riesca*

$$|K(x, y, u') - K(x, y, u)| \leqq \Lambda_\tau |u' - u|,$$

[3]) Nel volume 49 (1960), degli Annali di Matematica pura e applicata, dedicato a Giovanni Sansone.

esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4_V) *della classe* $C(A, B)$ *e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni insieme $A(\tau)$, *ed ivi la formola di maggiorazione:*

$$|u(x) - u^{(0)}(x)| \leqq U_\tau G_p[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)],$$

ove U_τ *indica un numero non superato in* $A(\tau)$ *della funzione*

$$\left| f(x) + \int_{A(x)} K[x, y, u^{(0)}(y)]\, dy - u^{(0)}(x) \right|,$$

e_τ *il punto estremo inferiore di* $A(\tau)$ *e* $G_p(t)$ *la funzione intera della variabile reale* t:

$$G_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha, per x in $A(\tau)$,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq \Lambda_\tau \int_{A(x)} |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)|\, dy, \tag{24}$$

e quindi

$$|u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)| \leqq \Lambda_\tau \int_{A(x)} |u^{(1)}(y) - u^{(0)}(y)|\, dy \leqq \Lambda_\tau U_\tau \operatorname{mis} A(x) \leqq \Lambda_\tau U_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau),$$

donde, successivamente, tenendo conto della (24),

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leqq U_\tau \frac{[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)]^n}{(n!)^p}. \qquad \text{Ecc.}$$

Si osservi che all'ipotesi secondo la quale le funzioni della successione $\{u^{(n)}(x)\}$ devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire quella dell'appartenenza a tale classe della sola funzione iniziale $u^{(0)}(x)$ e, per ogni τ, all'insieme $A \times B$ quello definito dal verificarsi delle limitazioni

$$x \in A_\tau, \qquad |u - u^{(0)}(x)| \leqq U_\tau G_p[\Lambda_\tau \operatorname{mis} R(x, e_\tau)].$$

V. *Per ogni punto* x *di* A, *l'insieme* $A(x)$ *sia limitato e sia* $H(x, y)$ *una matrice quadrata d'ordine* q, *a elementi complessi, funzione del punto* (x, y) *continua in* $A \times A$, *risultando, in* $A(\tau) \times A(\tau)$, *per* $y \leqq x$, *con un certo numero* M_τ,

$$|H(x, y)| \leqq M_\tau.$$

Se, come è stato già supposto, la funzione $f(x)$ *è continua in* A, *l'equazione integrale lineare di* VOLTERRA:

$$u(x) = f(x) + \int_{A(x)} H(x, y) f(y)\, dy,$$

possiede una ed una sola soluzione, continua in A, *e risulta, in* $A(\tau)$,

$$|u(x) - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p[M_\tau \operatorname{mis} R(x, y)]\, |f(y)|\, dy.$$

DIMOSTRAZIONE. Per i nuclei iterati del nucleo $H(x, y)$, si ha [4])

$$|H^{(1)}(x, y)| = \left| \int_{A(x,y)} H(x, s)\, H(s, y)\, \mathrm{d}s \right| \leqq M_\tau^2 \,\mathrm{mis}\, A(x, y) \leqq M_\tau^2 \,\mathrm{mis}\, R(x, y),$$

$$|H^2(x, y)| = \left| \int_{A(x,y)} H^{(1)}(x, s)\, H(s, y)\, \mathrm{d}s \right| \leqq M_\tau^3 \int_{A(x,y)} \mathrm{mis}\, R(x, s)\, \mathrm{d}s$$

$$\leqq M_\tau^3 \int_{R(x,y)} \mathrm{mis}\, R(x, s)\, \mathrm{d}s = M_\tau^3 \frac{[\mathrm{mis}\, R(x, y)]^2}{(2!)^p},$$

e, successivamente,

$$|H^{(n)}(x, y)| \leqq M_\tau^{n+1} \frac{[\mathrm{mis}\, R(x, y)]^n}{(n!)^p},$$

onde segue che il nucleo $H(x, y)$ é dotato di nucleo risolvente $H^{-1}(x, y)$, per il quale, in $A(\tau) \times A(\tau)$, sussiste la limitazione

$$|H^{-1}(x, y)| \leqq M_\tau\, G_p [M_\tau \,\mathrm{mis}\, R(x, y)]. \qquad \text{Ecc.}$$

VI. *Per ogni punto x di A, l'insieme $A(x)$ sia limitato e si abbia, in $A \times A \times B$ e per $y \leqq x$,*

$$K(x, y, u) \equiv H(x, y, u)\, u,$$

$H(x, y, u)$ designando una matrice quadrata d'ordine q, funzione del punto (x, y, u), continua in $A \times A \times B$, per la quale risulti, in ogni insieme $A(\tau) \times A(\tau) \times B$, per $y \leqq x$,

$$|H(x, y, u)| \leqq M_\tau,$$

e, comunque vi si prendano due punti (x, y, u) e (x, y, u'), con $y \leqq x$,

$$|H(x, y, u') - H(x, y, u)| \leqq L_\tau |u' - u|,$$

M_τ e L_τ designando due certi numeri non negativi. Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite come soluzioni delle equazioni:

$$u^{(n+1)}(x) = f(x) + \int_{A(x)} H[x, y, u^{(n)}(y)]\, u^{(n+1)}(y)\, \mathrm{d}y, \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

appartengono alla classe $C(A, B)$, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (4_V), della classe medesima, avendosi

$$\lim_{n \to \infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni insieme $A(\tau)$, e ivi la formola di maggiorazione

$$|u(x) - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p [M_\tau \,\mathrm{mis}\, R(x, y)]\, |f(y)|\, \mathrm{d}y.$$

DIMOSTRAZIONE. E'conseguenza di un lemma analogo a quello su cui si basa il teorema III [cfr. loc. cit. [2])].

[4]) Cfr. i miei Appunti d'Analisi Superiore [Napoli, Rondinella (1940)], p. 592.

Si osservi che all'ipotesi secondo la quale le funzioni della successione $\{u^{(n)}(x)\}$ devono appartenere alla classe $C(A, B)$, si può sostituire quella dell'appartenenza a tale classe della sola funzione iniziale $u^{(0)}(x)$ e, per ogni punto τ di A, all'insieme $A \times B$, quello definito dal verificarsi delle limitazioni

$$x \in A_\tau, \qquad |u - f(x)| \leqq M_\tau \int_{A(x)} G_p [M_\tau \operatorname{mis} R(x, y)] \, |f(y)| \, \mathrm{d}y .$$

Considerando, per esempio, di nuovo, la funzione $K(x, y, u)$ del n. 4, sia A l'intervallo $(x_0, +\infty)$ dell'asse reale x e μ_τ un numero non superato da $|\varphi(x, y)|$, nel triangolo del piano (x, y), definito dal verificarsi delle limitazioni: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \tau$, $x_0 \leqq y \leqq x$. Il teorema IV si applica all'equazione integrale

$$u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K[x, y, u(y)] \, \mathrm{d}y ,$$

nell'ipotesi $\alpha \leqq 0$ e stabilisce l'esistenza e l'unicità della sua soluzione, nonché, in ogni intervallo A_τ, la formola di maggiorazione:

$$|u(x)| \leqq F_\tau \, e^{\mu_\tau \operatorname{Max}(n, 1+|\alpha|)(x - x_0)},$$

essendo F_τ un numero non superato da $|f(x)|$ in A_τ, laddove il teorema VI stabilisse, per la stessa equazione, l'esistenza e l'unicità della soluzione, per $\alpha \leqq 1$, e la formola di maggiorazione, che é più ristretta della precedente

$$|u(x)| \leqq F_\tau \, e^{\mu_\tau (x - x_0)}.$$

Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma (Italien)

(Eingegangen am 12. Dezember 1959)

Heinz, E.
Math. Zeitschr. 74, 129–157 (1960)

Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Erhard Heinz[1])

Problemstellung

Ein bekanntes Resultat von H. Weyl und H. Lewy[2]) besagt, daß jede auf der Einheitskugel Σ vorgegebene analytische Metrik ds^2 positiver Gaußscher Krümmung durch eine reguläre Eifläche $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume verwirklicht werden kann. (Genauer: Es gibt eine auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}$, die in den lokalen Koordinaten u, v von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und der Gleichung $(d\mathfrak{x})^2 = ds^2$ genügt.)

In neuerer Zeit ist es L. Nirenberg [*23*] und A. W. Pogorelow [*24*] gelungen, dieses Theorem auf den Fall nichtanalytischer Metriken zu erweitern. Wir wollen die Hauptpunkte der Beweise hier kurz hervorheben. Als wesentliches Hilfsmittel dienen beiden Autoren gewisse nichttriviale Ungleichungen für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$, oder, was damit äquivalent ist, Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$. Die erste Ungleichung, die bei Nirenberg [*23*] verwendet wird, rührt von H. Weyl her[3]) und lautet

$$H^2 \leqq \max_{\Sigma} \left(K - \frac{1}{4K} \Delta_2 K \right). \tag{1}$$

Dabei bedeutet K die Gaußsche Krümmung von $\mathfrak{F}$, und Δ_2 ist der dem Linienelement ds^2 zugeordnete Beltramische Differentialoperator zweiter Ordnung. Die entsprechende Ungleichung von Pogorelow [*24*] geht insofern über (1) hinaus, als sie sich auf berandete Flächen, nämlich konvexe Mützen $\mathfrak{F}$ mit ebenem Rand, bezieht. Sie lautet

$$|H| \leqq \frac{2\sqrt{\frac{M}{K_0}}\,(1+h)}{z \cos \varphi_0}\ ^4). \tag{2}$$

---

[1]) Diese Arbeit wurde teilweise von einem Kontrakt des Office of Naval Research in Stanford University unterstützt.

[2]) Vgl. Weyl [*25*], Lewy [*21*], ferner Nirenberg [*23*] und Pogorelow [*24*]. Zusammenfassende Darstellungen bei Efimow [*7*] und Busemann [*2*], vgl. auch die Note von A. Wintner [*26*].

[3]) Vgl. Weyl [*25*], § 6, ferner Nirenberg [*23*], § 10, Chern [*5*] und A. Wintner [*27*].

[4]) Vgl. Pogorelow [*24*], S. 74–79. Wegen einer Erweiterung dieser Ungleichung auf allgemeine Mützen siehe [*13*], Theorem 5.

Hierbei ist h die Höhe der Mütze, φ_0 der größte Winkel zwischen der Tangentialebene der Mütze und ihrer Basisebene, z der Abstand des Punktes von der Basisebene, K_0 das Minimum der Gaußschen Krümmung von $\mathfrak{F}$ und M eine Zahl, die vom Minimum der Diskriminante von ds^2 sowie der oberen Schranke der Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *vierten* Ordnung abhängt. Aus diesen Abschätzungen, sowie aus einem von L. NIRENBERG [22] herrührenden allgemeinen Theorem über nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, ergibt sich die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für den Fall, daß die Koeffizienten von ds^2 *viermal* stetig differenzierbar sind[5]).

Es erhebt sich nun die Frage, ob eine reguläre Einbettung von ds^2 im dreidimensionalen Raume auch im Falle einer *dreimal* stetig differenzierbaren Metrik ds^2 möglich ist. Dazu wäre es ausreichend, eine den Ungleichungen (1) oder (2) analoge Abschätzung für H zu gewinnen, wo auf der rechten Seite nur die Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *dritten* Ordnung auftreten. Dies soll in der vorliegenden Arbeit ausgeführt werden. Darüber hinaus werden wir die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche oder eine Mütze sein muß, fallen lassen und nur fordern, daß $\iint_{\mathfrak{F}} |H|\, do < \infty$ ausfällt.

Unser Hauptresultat (Satz 3) läßt sich folgendermaßen aussprechen:

VORAUSSETZUNGEN.

(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ *ist eine in einem Gebiet* Ω *der* uv*-Ebene erklärte, reelle, zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion mit*

$$(d\mathfrak{x})^2 = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{3}$$

Dabei sind die Koeffizienten $E(u,v)$, $F(u,v)$ *und* $G(u,v)$ *in* Ω *viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen*

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq a, \tag{4}$$

$$|E_u|,\ \ldots,\ |G_v| \leqq a, \tag{5}$$

$$|E_{uu}|,\ \ldots,\ |G_{vv}| \leqq a, \tag{6}$$

$$|E_{uuu}|,\ \ldots,\ |G_{vvv}| \leqq a \tag{7}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{8}$$

mit einer festen positiven Zahl a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung* $K(u,v)$ *von* ds^2 *gilt die Ungleichung*

$$K(u,v) \geqq b > 0. \tag{9}$$

(III) *Es ist*

$$\iint_{\Omega} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{10}$$

[5]) Darüber hinaus beweist POGORELOW Differenzierbarkeitssätze für konvexe Flächenstücke (vgl. [24], S. 86). Wegen einer Neudarstellung der Pogorelowschen Beweise, die in ihrer ursprünglichen Form fünfmal stetige Differenzierbarkeit der Metrik ds^2 voraussetzen, sei auf BUSEMANN [2] verwiesen.

wobei H die mittlere Krümmung und $do = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ das Oberflächenelement der Fläche $\mathfrak{F}: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ bedeuten.

BEHAUPTUNG. *Es sei Ω_ϱ ($\varrho > 0$) die Teilmenge aller Punkte von Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als ϱ ist, und ν eine reelle Zahl mit $0 < \nu < 1$. Dann gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|, \ldots, |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a, b, c, \varrho) < \infty \qquad ((u, v) \in \Omega_\varrho) \tag{11}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{c} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1, v_1)| \\ \vdots \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1, v_1)| \end{array} \right\} \leqq \tau_1 \cdot \left(\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\right)^\nu \tag{12}$$

$$((u_1, v_1) \in \Omega_\varrho, \quad (u_2, v_2) \in \Omega_\varrho)$$

mit

$$\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich dann in § 4 dieser Arbeit die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für eine dreimal stetig differenzierbare Metrik ds^2 (Satz 4)[5a]).

Die Methoden, mit denen wir Satz 3 beweisen werden, sind mit denjenigen verwandt, die H. LEWY in seinen Untersuchungen über Monge-Ampèresche Differentialgleichungen und das Weylsche Problem benutzt hat ([*18*], [*19*], [*20*] und [*21*]). Sie eröffnen auch den Zugang zu weiteren Problemen in der Differentialgeometrie im Großen.

Zunächst betrachten wir in § 1 und § 2 eineindeutige Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die nichtlinearen Systemen elliptischer Differentialgleichungen der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = h_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + h_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{array} \right. \tag{13}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y = \tilde{h}_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{array} \right. \tag{14}$$

genügen. Solche Systeme spielen auch in den Arbeiten von H. LEWY eine fundamentale Rolle[6]). Es wird uns gelingen, unter sehr schwachen Regularitätsvoraussetzungen hinsichtlich der Koeffizienten $h_1(x, y), \ldots, \tilde{h}_4(x, y)$ sowohl die ersten Ableitungen von x und y nach *oben* als auch die Funktionaldeterminante $|x_u y_v - x_v y_u|$ *durch eine positive Zahl nach unten* abzuschätzen und so unsere früheren Resultate[7]) zu verallgemeinern (Satz 2). Dabei liegen in dem letzteren Problem die eigentlichen Schwierigkeiten. Indem wir Satz 2 auf die Darbouxschen Differentialgleichungen anwenden, denen die Variablen

[5a]) Zusatz bei der Korrektur vom 13. 7. 60: Ein neuer Beweis von Satz 4, der sich auf [*13*], Theorem 2, stützt, soll in einer späteren Arbeit gegeben werden. Dort wird auch der Fall einer zweimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 behandelt.

[6]) Siehe insbesondere [*19*], S. 373, [*20*] und [*21*], S. 106.

[7]) Siehe [*11*], Satz 3, sowie [*12*], Theorem 10 und Theorem 11.

u, v als Funktionen der konjugiert-isothermen Parameter α, β der Fläche $\mathfrak{F}$ genügen, erhalten wir in § 3 die gesuchten a-priori-Abschätzungen (11) und (12).

In der vorliegenden Arbeit wird von der Theorie der elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen kein Gebrauch gemacht. Vielmehr stützen sich alle Beweise auf Satz 2. Es sei bemerkt, daß sich dieses Theorem auch auf die Gewinnung von a-priori-Abschätzungen bei einer großen Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen anwenden läßt, was an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

§ 1. Lokales Verhalten

Hauptziel dieses Paragraphen ist die sinngemäße Übertragung des bekannten Satzes von HURWITZ über Folgen analytischer Funktionen[8]) auf eine Klasse von Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen (Satz 1). Zum Beweis werden die folgenden drei Hilfssätze benötigt:

HILFSSATZ 1. VORAUSSETZUNGEN:

(I) *Die Funktionen* $f^{(k)}(w) = f^{(k)}(u, v)$ $(k = 1, 2, \ldots;\ w = u + iv)$ *sind für* $|w| < R$ *reell und zweimal stetig differenzierbar und genügen außerdem für* $|w| < R$ *der Differentialungleichung*

$$|f^{(k)}_{w\overline{w}}| \leqq M\left(|f^{(k)}_{w}| + |f^{(k)}|\right) \tag{1.1}$$

mit einer festen positiven, von k unabhängigen Zahl M.

(II) *Die Relationen*

$$f^{(k)}(w) \to f(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.2}$$

und

$$f^{(k)}_{w}(w) \to f_{w}(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.3}$$

gelten gleichmäßig für $|w| < R$.

(III) *Es ist*

$$f(0) = f_{w}(0) = 0. \tag{1.4}$$

BEHAUPTUNG. *Entweder ist* $f(w) \equiv 0$, *oder es gibt eine positive ganze Zahl* p *mit*

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_{w}(w)}{w^{p}} \neq 0. \tag{1.5}$$

BEWEIS. Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge eines Resultates von P. HARTMAN und A. WINTNER[9]).

HILFSSATZ 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz* 1 *erfüllt, und außerdem sei*

$$f^{(k)}_{w}(w) \neq 0 \tag{1.6}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ *und* $|w| < R$. *Dann verschwindet die Grenzfunktion* $f(w) = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}(w)$ *identisch für* $|w| < R$.

[8]) Vgl. z.B. CARATHÉODORY [3], S. 65.

[9]) Siehe [10], Theorem 1 und 2. Die Beweisidee geht auf CARLEMAN [4] zurück.

Beweis. Angenommen, es sei $f(w) \not\equiv 0$. Dann gibt es nach Hilfssatz 1 eine positive ganze Zahl p mit

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_w(w)}{w^p} = A \neq 0. \tag{1.7}$$

Man setze

$$\varphi(w) = A\, w^p. \tag{1.8}$$

Wegen (1.3) und (1.7) lassen sich dann eine positive Zahl r mit $r < R$ und eine positive ganze Zahl k_0 so bestimmen, daß für $|w| = r$ die Ungleichung

$$|f_w^{(k_0)}(w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| \tag{1.9}$$

erfüllt ist. Daraus folgt aber [10])

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg f_w^{(k_0)}(w) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg \varphi(w) = p > 0. \tag{1.10}$$

Also gibt es ein w_0 mit $|w_0| < r$ und $f_w^{(k_0)}(w_0) = 0$ im Widerspruch zu (1.6). Damit ist gezeigt, daß die Funktion $f(w)$ für $|w| < R$ identisch verschwindet, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Um die nächsten Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der folgenden

Definition 1. *$\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ ist die Menge aller komplexwertigen Funktionen $z(w) = x(u, v) + i\, y(u, v)$ $(w = u + iv)$ mit den folgenden Eigenschaften: $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in einem Gebiet D der w-Ebene und genügen dort den Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \Delta x = a(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + b(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + c(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + d(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{cases} \tag{1.11}$$

und

$$\begin{cases} \Delta y = \tilde{a}(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{b}(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{c}(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{d}(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u). \end{cases} \tag{1.12}$$

Dabei sind die Koeffizienten $a(z) = a(x, y), \ldots, \tilde{d}(z) = \tilde{d}(x, y)$ $(z = x + i\, y)$ reell und für $|z| < \infty$ definiert. Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|a(z)|, \ldots, |\tilde{d}(z)| \leqq M_0 \tag{1.13}$$

für $|z| < \infty$ und

$$\begin{cases} |\tilde{a}(z_2) - \tilde{a}(z_1)| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(a(z_2) - \tilde{b}(z_2)) - (a(z_1) - \tilde{b}(z_1))| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(b(z_2) - \tilde{c}(z_2)) - (b(z_1) - \tilde{c}(z_1))| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \\ |c(z_2) - c(z_1)| \leqq M_1 |z_2 - z_1| \end{cases} \tag{1.14}$$

für $|z_1| < \infty$ und $|z_2| < \infty$, wobei M_0 und M_1 zwei feste positive Zahlen bedeuten.

[10]) Zu den hier verwendeten Fundamentaleigenschaften der Umlaufszahlen vgl. z.B. Fenchel [8].

HILFSSATZ 3. *Die Funktion* $z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ *gehöre zu* $\Gamma_0(M_0,M_1;D)$ *und genüge in einer in* D *enthaltenen Kreisscheibe* $|w-w_0|\leqq\varrho$ *den Ungleichungen*

$$|z(w)-z_0|<\frac{1}{72M_0}\qquad(z_0=x_0+iy_0) \tag{1.15}$$

und

$$|z_u|+|z_v|\leqq K<\infty. \tag{1.16}$$

Ferner sei Θ *eine beliebige reelle Zahl. Dann gibt es eine für* $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ *zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion* $g(\eta)$ *mit den folgenden Eigenschaften*:

(I) *Es ist*

$$g(0)=g'(0)=0, \tag{1.17}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g'(\eta)|\leqq 1 \tag{1.18}$$

und

$$|g''(\eta)|\leqq 72M_0 \tag{1.19}$$

für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$.

(II) *Die Funktion*

$$\begin{cases} f(w)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)- \\ \qquad -g\big(\cos\Theta\cdot(y(u,v)-y_0)-\sin\Theta\cdot(x(u,v)-x_0)\big) \end{cases} \tag{1.20}$$

genügt für $|w-w_0|<\varrho$ *der Differentialungleichung*

$$|f_{w\bar w}|\leqq(288KM_0+24K^2M_1)\,(|f_w|+|f|). \tag{1.21}$$

BEWEIS. Man setze

$$\xi(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big) \tag{1.22}$$

und

$$\eta(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)-\sin\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big). \tag{1.23}$$

Dann genügen die Funktionen $\xi=\xi(u,v)$ und $\eta=\eta(u,v)$ für $w\in D$ den Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \Delta\xi=A(\xi,\eta)\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+B(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +C(\xi,\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+D(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u) \end{cases} \tag{1.24}$$

und

$$\begin{cases} \Delta\eta=\widetilde{A}(\xi,\eta)\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+\widetilde{B}(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +\widetilde{C}(\xi,\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+\widetilde{D}(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u) \end{cases} \tag{1.25}$$

mit

$$\begin{cases} A(\xi,\eta)=a(x,y)\cos^3\Theta+\big(\tilde a(x,y)+b(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta+ \\ \qquad +\big(\tilde b(x,y)+c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta+\tilde c(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases} \tag{1.26}$$

$$(1.27)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) = b(x,y)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(-2a(x,y) + \tilde{b}(x,y) + 2c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(-2\tilde{a}(x,y) - b(x,y) + 2\tilde{c}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - \\ \quad - \tilde{b}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.28)\quad \begin{cases} C(\xi,\eta) = c(x,y)\cos^3\Theta + \big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \tilde{a}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.29)\quad D(\xi,\eta) = d(x,y)\cos\Theta + \tilde{d}(x,y)\sin\Theta$$

und

$$(1.30)\quad \begin{cases} \widetilde{A}(\xi,\eta) = \tilde{a}(x,y)\cos^3\Theta - \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta - \\ \quad - \big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - c(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.31)\quad \begin{cases} \widetilde{B}(\xi,\eta) = \tilde{b}(x,y)\cos^3\Theta - \\ \quad - \big(2\tilde{a}(x,y) + b(x,y) - 2\tilde{c}(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2a(x,y) - \tilde{b}(x,y) - 2c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + b(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.32)\quad \begin{cases} \widetilde{C}(\xi,\eta) = \tilde{c}(x,y)\cos^3\Theta - \big(\tilde{b}(x,y) + c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(\tilde{a}(x,y) + b(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta - a(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.33)\quad \widetilde{D}(\xi,\eta) = -d(x,y)\sin\Theta + \tilde{d}(x,y)\cos\Theta,$$

wobei die Größen x, y auf der rechten Seite von (1.26)—(1.33) durch die Variabeln ξ, η vermöge der Substitution

$$(1.34)\quad \begin{cases} x = x_0 + \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta \\ y = y_0 + \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta \end{cases}$$

auszudrücken sind. Aus (1.26)—(1.33) folgt

$$(1.35)\quad \begin{cases} A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta) = \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(3\tilde{a}(x,y) + 2\big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\big) + 3c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + \big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big)\sin^3\Theta \end{cases}$$

und

$$(1.36)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) - \widetilde{C}(\xi,\eta) = \big(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\big)\cos^3\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\big) + 3c(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \quad + \big(2\big(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\big) - 3\tilde{a}(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \quad + \big(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\big)\sin^3\Theta. \end{cases}$$

Setzt man $\zeta = \xi + i\eta$, so ergeben sich für die Koeffizienten $A(\zeta) = A(\xi,\eta), \ldots, \widetilde{D}(\zeta) = \widetilde{D}(\xi,\eta)$ die folgenden Abschätzungen:

$$(1.37)\quad |A(\zeta)|, \ldots, |D(\zeta)| \leqq 12M_0 \qquad (|\zeta| < \infty)$$

und

$$
\left\{\begin{aligned}
&|\widetilde{A}(\zeta_2)-\widetilde{A}(\zeta_1)|\leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1|\\
&|(A(\zeta_2)-\widetilde{B}(\zeta_2))-(A(\zeta_1)-\widetilde{B}(\zeta_1))|\leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1|\\
&|(B(\zeta_2)-\widetilde{C}(\zeta_2))-(B(\zeta_1)-\widetilde{C}(\zeta_1))|\leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1|\\
&|C(\zeta_2)-C(\zeta_1)|\leqq 12M_1|\zeta_2-\zeta_1|\\
&(|\zeta_1|<\infty,\ |\zeta_2|<\infty).
\end{aligned}\right. \tag{1.38}
$$

Man definiere nun die Funktion $\mathsf{X}=\mathsf{X}(\eta, g_0, g_1)$ durch die Gleichung

$$
\left\{\begin{aligned}
\mathsf{X}(\eta,g_0,g_1)=&-\widetilde{A}(g_0,\eta)\,g_1^3+(A(g_0,\eta)-\widetilde{B}(g_0,\eta))\,g_1^2+\\
&+(B(g_0,\eta)-\widetilde{C}(g_0,\eta))\,g_1+C(g_0,\eta).
\end{aligned}\right. \tag{1.39}
$$

Wegen (1.38) genügt X in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich von (η, g_0, g_1) einer Lipschitzbedingung, und aus (1.37) folgt die Abschätzung

$$|\mathsf{X}(\eta,g_0,g_1)|\leqq 72M_0 \tag{1.40}$$

für $\qquad |\eta|<\infty, \qquad |g_0|<\infty \quad \text{und} \quad |g_1|\leqq 1.$

Nach einem fundamentalen Existenzsatz gibt es eine für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Lösung $g=g(\eta)$ der Differentialgleichung

$$g''(\eta)=\mathsf{X}(\eta,g(\eta),g'(\eta)) \tag{1.41}$$

mit

$$g(0)=g'(0)=0 \tag{1.42}$$

und

$$|g'(\eta)|\leqq 1\ ^{11}). \tag{1.43}$$

Hieraus folgt insbesondere

$$|g''(\eta)|\leqq 72M_0 \qquad \left(|\eta|<\tfrac{1}{72M_0}\right). \tag{1.44}$$

Wir betrachten nun die folgende reelle Funktion der Variablen u, v [12]:

$$f(w)=f(u,v)=\xi(u,v)-g\left(\eta(u,v)\right). \tag{1.45}$$

Wegen (1.15) ist $|\eta(u,v)|<\frac{1}{72M_0}\left(|w-w_0|<\varrho\right)$. Also ist $f(w)$ für $|w-w_0|<\varrho$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$
\left\{\begin{aligned}
\Delta f&=\Delta\xi-g'(\eta)\,\Delta\eta-g''(\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2)\\
&=[A(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{A}(\xi,\eta)]\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+\\
&\quad+[B(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{B}(\xi,\eta)]\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+\\
&\quad+[C(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{C}(\xi,\eta)-g''(\eta)]\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+\\
&\quad+[D(\xi,\eta)-g'(\eta)\,\widetilde{D}(\xi,\eta)]\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u).
\end{aligned}\right. \tag{1.46}
$$

[11]) Siehe z.B. KAMKE [16], S. 124—126.

[12]) Zu diesem Schritt vergleiche man LEWY [20], insbes. S. 691.

Ersetzt man hierin die Größen ξ_u und ξ_v durch die Ausdrücke

$$\xi_u = f_u + g'(\eta)\,\eta_u \tag{1.47}$$

und

$$\xi_v = f_v + g'(\eta)\,\eta_v \tag{1.48}$$

und berücksichtigt (1.39) und (1.41), so erhält man für $f(w)$ die Differentialgleichung

$$\Delta f = P(f_u^2 + f_v^2) + Q(f_u\eta_u + f_v\eta_v) + R(\eta_u^2 + \eta_v^2) + S(f_u\eta_v - f_v\eta_u) \tag{1.49}$$

mit

$$P = A(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\widetilde{A}(\xi,\eta)\,, \tag{1.50}$$

$$Q = B(\xi,\eta) + [2A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta)]\,g'(\eta) - 2\widetilde{A}(\xi,\eta)\,g'(\eta)^2, \tag{1.51}$$

$$\left\{\begin{aligned} R = &-[\widetilde{A}(\xi,\eta) - \widetilde{A}(g(\eta),\eta)]\,g'(\eta)^3 + \\ &+[(A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta)) - (A(g(\eta),\eta) - \widetilde{B}(g(\eta),\eta))]\,g'(\eta)^2 + \\ &+[(B(\xi,\eta) - \widetilde{C}(\xi,\eta)) - (B(g(\eta),\eta) - \widetilde{C}(g(\eta),\eta))]\,g'(\eta) + \\ &+[C(\xi,\eta) - C(g(\eta),\eta)] \end{aligned}\right. \tag{1.52}$$

und

$$S = D(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\widetilde{D}(\xi,\eta)\,. \tag{1.53}$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (1.49) abschätzen. Zunächst erhält man aus (1.16), (1.22), (1.23), (1.43), (1.47) und (1.48) die Ungleichungen

$$|\xi_u|, \ldots, |\eta_v| \leqq K \tag{1.54}$$

und

$$|f_u|,\quad |f_v| \leqq 2K \tag{1.55}$$

für $|w - w_0| < \varrho$.

Ferner ergeben sich aus den Darstellungen (1.50)–(1.53) unter Berücksichtigung der Ungleichungen (1.37), (1.38) und (1.43) die folgenden Abschätzungen für die Koeffizienten P, Q, R und S:

$$\left\{\begin{aligned} &|P|,\ |Q|,\ |S| \leqq 72\,M_0 \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \tfrac{1}{72\,M_0}\right) \end{aligned}\right. \tag{1.56}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &|R| \leqq 48\,M_1\,|\xi - g(\eta)| \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \tfrac{1}{72\,M_0}\right). \end{aligned}\right. \tag{1.57}$$

Trägt man dies in (1.49) ein und beachtet (1.45), so entsteht

$$\left\{\begin{aligned} |\Delta f| &\leqq |P f_u + Q\eta_u + S\eta_v|\,|f_u| + \\ &\quad + |P f_v + Q\eta_v - S\eta_u|\,|f_v| + (\eta_u^2 + \eta_v^2)\,|R| \\ &\leqq 288\,K\,M_0(|f_u| + |f_v|) + 96K^2 M_1 |f(w)|\,, \end{aligned}\right. \tag{1.58}$$

also

$$|f_{w\bar{w}}| \leqq (288 K M_0 + 24 K^2 M_1)\,(|f_w| + |f|) \tag{1.59}$$

für $|w - w_0| < \varrho$, womit Hilfssatz 3 vollständig bewiesen ist.

Jetzt sind wir in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

SATZ 1. *Es sei* $z^{(k)}(w) = x^{(k)}(u, v) + i\,y^{(k)}(u, v)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von Funktionen aus* $\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ *mit* $\frac{\partial(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial(u, v)} \neq 0$ $(w \in D)$, *die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von* D *gegen eine in* D *einmal stetig differenzierbare Funktion* $z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$ *konvergieren. Dann ist entweder*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \qquad (w \in D) \tag{1.60}$$

oder

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0 \qquad (w \in D). \tag{1.61}$$

BEWEIS. Angenommen, die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ verschwindet in einem Punkt $w_0 \in D$. Dann gibt es eine reelle Zahl Θ mit

$$x_u \cos\Theta + y_u \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0) \tag{1.62}$$

und

$$x_v \cos\Theta + y_v \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0). \tag{1.63}$$

Ferner lassen sich auf Grund unserer Voraussetzungen zwei positive Zahlen ϱ und K so bestimmen, daß die Kreisscheibe $|w - w_0| \leqq \varrho$ zu D gehört und für $|w - w_0| \leqq \varrho$ und alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichungen

$$\begin{cases} |z^{(k)}(w) - z_0^{(k)}| \leqq \frac{1}{1 + 72 M_0} \\ \left(z_0^{(k)} = z^{(k)}(w_0) = x_0^{(k)} + i\,y_0^{(k)}\right) \end{cases} \tag{1.64}$$

und

$$|z_u^{(k)}(w)| + |z_v^{(k)}(w)| \leqq K \tag{1.65}$$

erfüllt sind. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann eine Folge reeller Funktionen $\{g_k(\eta)\}$, die für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$ zweimal stetig differenzierbar sind und außerdem den folgenden Bedingungen genügen:

(I) Es ist

$$g_k(0) = g_k'(0) = 0, \tag{1.66}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g_k'(\eta)| \leqq 1 \tag{1.67}$$

und

$$|g_k''(\eta)| \leqq 72 M_0 \tag{1.68}$$

für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$.

(II) Die reellen Funktionen

$$(1.69)\quad \begin{cases} f^{(k)}(w) = \cos\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right) + \sin\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \\ \qquad - g_k\left(\cos\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \sin\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right)\right) \end{cases}$$

sind für $|w-w_0|<\varrho$ erklärt und genügen dort der Differentialungleichung

$$(1.70)\quad |f^{(k)}_{w\bar{w}}| \leqq M\left(|f^{(k)}_{w}| + |f^{(k)}|\right)$$

mit

$$(1.71)\quad M = 288\,K\,M_0 + 24\,K^2 M_1.$$

Da die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x^{(k)},\,y^{(k)})}{\partial(u,v)}$ $(k=1,2,\ldots)$ in D nicht verschwinden, so ist

$$(1.72)\quad f^{(k)}_{w}(w) \neq 0$$

für $|w-w_0|<\varrho$ und $k=1,2,\ldots$. Ferner entnimmt man aus (1.66)—(1.68) die Existenz einer Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen derart, daß die Funktionen $g_{k_\nu}(\eta)$ zusammen mit ihren ersten Ableitungen gleichmäßig in $|\eta| \leqq \frac{1}{72M_0}$ gegen eine für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $g(\eta)$ konvergieren, für die

$$(1.73)\quad g(0) = g'(0) = 0$$

ausfällt. Setzt man also $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ und

$$(1.74)\quad \begin{cases} f(w) = \cos\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right) + \sin\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \\ \qquad - g\left(\cos\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \sin\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right)\right), \end{cases}$$

so ist $f(w)$ für $|w-w_0|<\varrho$ einmal stetig differenzierbar, und die Relationen

$$(1.75)\quad f^{(k_\nu)}(w) \to f(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

und

$$(1.76)\quad f^{(k_\nu)}_{w}(w) \to f_w(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

gelten gleichmäßig für $|w-w_0| \leqq \varrho$. Aus (1.62), (1.63) und (1.73) folgt

$$(1.77)\quad f(w_0) = f_w(w_0) = 0.$$

Hilfssatz 2 wird also anwendbar und liefert

$$(1.78)\quad f(w) \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right).$$

Daraus, sowie aus (1.74), folgt aber

$$(1.79)\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right)$$

und somit $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0$ in D, somit Satz 1 bewiesen ist.

§ 2. Abschätzung der Funktionaldeterminante

Wir stellen uns jetzt das Problem, unter geeigneten Normierungsbedingungen die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ einer Abbildung $(u,v)\to(x,y)$ nach unten abzuschätzen, falls x und y einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen. Die Überlegungen beruhen einerseits auf Satz 1 und andererseits auf der Kenntnis der a-priori-Schranken für die ersten Ableitungen von x und y, über die die nächsten beiden Hilfssätze Auskunft geben.

HILFSSATZ 4. *Die komplexwertige Funktion $z=z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ sei für $|w-w_0|<\varrho$ zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialungleichung*

$$|\Delta z|\leqq\alpha(|z_u|^2+|z_v|^2) \tag{2.1}$$

mit $0\leqq\alpha<1$. Außerdem sei

$$|z(w)|\leqq 1 \tag{2.2}$$

für $|w-w_0|<\varrho$. Dann gibt es eine feste positive, nur von α abhängige Zahl $k=k(\alpha)$ mit

$$(|z_u|+|z_v|)_{w=w_0}\leqq\frac{k(\alpha)}{\varrho}. \tag{2.3}$$

Für den Beweis dieses Hilfssatzes sei auf [12], Theorem 2, verwiesen [13]).

HILFSSATZ 5. *Es sei Γ^* eine Menge von komplexwertigen Funktionen $z=z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$, die in der Kreisscheibe $|w|<1$ zweimal stetig differenzierbar und außerdem für $|w|\leqq 1$ gleichgradig stetig sind. Ferner gelte für alle Funktionen $z(w)\in\Gamma^*$ die Differentialungleichung*

$$|\Delta z|\leqq\beta(|z_u|^2+|z_v|^2) \tag{2.4}$$

mit einer positiven Zahl β. Dann hat man für $0\leqq r<1$ und $0<\nu<1$ die Abschätzungen

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w|\leqq r\\ z(w)\in\Gamma^*}}(|z_u|+|z_v|)<\infty \tag{2.5}$$

und

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w_1|,\,|w_2|\leqq r,\,w_1\neq w_2\\ z(w)\in\Gamma^*}}\frac{|z_u(w_2)-z_u(w_1)|+|z_v(w_2)-z_v(w_1)|}{|w_2-w_1|^\nu}<\infty. \tag{2.6}$$

BEWEIS. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ^* gibt es eine positive, nur von β und r abhängige Zahl $\delta(\beta,r)$ mit $\delta(\beta,r)<1-r$, so daß die Ungleichung

$$|z(w_2)-z(w_1)|\leqq\frac{1}{2\beta} \tag{2.7}$$

---

[13]) Der Satz verliert seine Gültigkeit für $\alpha\geqq 1$ (vgl. [12], S. 230). Für den Beweis des folgenden Hilfssatzes reicht die weniger tiefliegende Behauptung aus, daß (2.3) für $0\leqq\alpha<\alpha_0$ gilt, wobei α_0 eine feste positive Zahl bedeutet (vgl. [11], § 2).

für $|w_2 - w_1| \leqq \delta(\beta, r)$ $(|w_1|, |w_2| \leqq 1)$ und alle Funktionen $z(w) \in \Gamma^*$ erfüllt ist. Es sei nun w_0 eine beliebige komplexe Zahl mit $|w_0| \leqq r$, und man setze

$$Z(w) = 2\beta\left(z(w) - z(w_0)\right). \tag{2.8}$$

Offenbar ist die Funktion $Z(w)$ für $|w - w_0| < \delta(\beta, r)$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialungleichung

$$|\Delta Z| \leqq \tfrac{1}{2}\left(|Z_u|^2 + |Z_v|^2\right). \tag{2.9}$$

Ferner ist

$$|Z(w)| \leqq 1 \qquad \left(|w - w_0| < \delta(\beta, r)\right). \tag{2.10}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 4 (mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\varrho = \delta(\beta, r)$) ergibt sich

$$\left(|Z_u| + |Z_v|\right)_{w=w_0} \leqq \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)}{\delta(\beta, r)}, \tag{2.11}$$

also

$$\left(|z_u| + |z_v|\right)_{w=w_0} \leqq \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)}{2\beta \cdot \delta(\beta, r)}, \tag{2.12}$$

womit die Ungleichung (2.5) bewiesen ist. Um (2.6) zu beweisen, setze man

$$\hat{Z}(w) = z(w) - z(0). \tag{2.13}$$

Wegen (2.4) und (2.12) hat man für $|w| \leqq \frac{1}{2}(1 + r)$ die Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned} |\Delta \hat{Z}| &\leqq \beta\left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) \\ &\leqq \beta \cdot \left(\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)}{2\beta \cdot \delta\left(\beta, \frac{1+r}{2}\right)}\right)^2 \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

und

$$|\hat{Z}(w)| \leqq \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)}{2\beta \cdot \delta\left(\beta, \frac{1+r}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

Daraus folgt (2.6) nach einem bekannten potentialtheoretischen Satz [14]).

Definition 2. *$\Gamma_1(M_0, M_1)$ ist die Menge aller für $|w| < 1$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(I) *$z = z(w)$ bildet die Kreisscheibe $|w| \leqq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ $(z = x + iy)$ ab, und es ist*

$$x_u\, y_v - x_v\, y_u \neq 0 \tag{2.16}$$

für $|w| < 1$.

(II) *Die Funktionen $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ genügen für $|w| < 1$ den partiellen Differentialgleichungen:*

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x = {} & h_1(x, y)\left(x_u^2 + x_v^2\right) + h_2(x, y)\left(x_u\, y_u + x_v\, y_v\right) + \\ & + h_3(x, y)\left(y_u^2 + y_v^2\right) + h_4(x, y)\left(x_u\, y_v - x_v\, y_u\right) \end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

[14]) Siehe z.B. [12], Lemma 1.

und

$$\left\{\begin{aligned} \Delta y = {} & \tilde{h}_1(x,y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x,y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ & + \tilde{h}_3(x,y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x,y)\,(x_u y_v - x_v y_u). \end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

Dabei sind die Koeffizienten $h_1(x,y), \ldots, \tilde{h}_4(x,y)$ *für* $|z| \leqq 1$ *einmal stetig differenzierbare, reelle Funktionen, und es gelten für* $|z| \leqq 1$ *die Abschätzungen*

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left(|h_\nu(x,y)| + |\tilde{h}_\nu(x,y)|\right) < M_0 < \infty \tag{2.19}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{4} \left(\left|\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \omega_\nu}{\partial y}\right|\right) < M_1 < \infty \tag{2.20}$$

mit

$$\omega_1(x,y) = \tilde{h}_1(x,y), \tag{2.21}$$

$$\omega_2(x,y) = h_1(x,y) - \tilde{h}_2(x,y), \tag{2.22}$$

$$\omega_3(x,y) = h_2(x,y) - \tilde{h}_3(x,y) \tag{2.23}$$

und

$$\omega_4(x,y) = h_3(x,y). \tag{2.24}$$

Es gilt nun der folgende

HILFSSATZ 6. *Es sei* Γ_1^* *eine Teilmenge von Funktionen* $z(w)$ *aus* $\Gamma_1(M_0, M_1)$, *die für* $|w| \leqq 1$ *gleichgradig stetig sind. Dann gelten für* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$ *die folgenden Abschätzungen*

$$\text{Obere Grenze}_{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}} \left(|z_u| + |z_v|\right) < \infty, \tag{2.25}$$

$$\text{Obere Grenze}_{|w_1|,\ |w_2| \leqq r,\ w_1 \neq w_2,\ z(w) \in \Gamma_1^*} \frac{|z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)|}{|w_2 - w_1|^\nu} < \infty \tag{2.26}$$

und

$$\text{Untere Grenze}_{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}} |x_u y_v - x_v y_u| > 0. \tag{2.27}$$

BEWEIS. Wegen (2.19) genügt jede Funktion $z(w) \in \Gamma_1^*$ der Differentialungleichung

$$|\Delta z| \leqq 2M_0\left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) \qquad (|w| < 1). \tag{2.28}$$

Hilfssatz 5 wird also anwendbar und liefert die Abschätzungen (2.25) und (2.26). Die Ungleichung (2.27) beweisen wir durch eine reductio ad absurdum. Angenommen, (2.27) sei falsch. Dann gibt es eine Punktfolge $\{w_k\}$ mit $|w_k| \leqq r$ und eine Funktionenfolge $\{z^{(k)}(w)\} \in \Gamma_1^*$ mit

$$\lim_{k \to \infty} \left(x_u^{(k)} y_v^{(k)} - x_v^{(k)} y_u^{(k)}\right)_{w = w_k} = 0. \tag{2.29}$$

Wegen (2.25), (2.26) und $|z(w)| \leqq 1$ $(|w| \leqq 1)$ gibt es eine Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I) Es ist

$$\lim_{\nu\to\infty} w_{k_\nu} = w^* \tag{2.30}$$

mit $|w^*| \leqq r < 1$.

(II) Die Funktionen $z^{(k_\nu)}(w)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konvergieren zusammen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $|w| \leqq R < 1$ gegen eine für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$. Daraus, sowie aus (2.29), entnimmt man die Gleichung

$$(x_u\, y_v - x_v\, y_u)_{w=w^*} = 0. \tag{2.31}$$

Offenbar ist $\Gamma_1(M_0, M_1) < \Gamma_0(M_0, M_1; D)$ mit $D = \{|w| < 1\}$[15]. Also ist Satz 1 auf die Funktionenfolge $\{z^{(k_\nu)}(w)\}$ anwendbar und liefert wegen (2.31) die Gleichung

$$x_u\, y_v - x_v\, y_u \equiv 0 \qquad (|w| < 1). \tag{2.32}$$

Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Zunächst gibt es wegen

$$|z^{(k_\nu)}(w)| = 1 \qquad (|w| = 1) \tag{2.33}$$

und der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ_1^* eine positive Zahl ϱ mit $\varrho < 1$ und

$$|z^{(k_\nu)}(w)| > \tfrac{1}{2} \qquad (|w| \geqq \varrho;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.34}$$

Also bilden die Funktionen $z = z^{(k_\nu)}(w)$ die Kreisscheibe $|w| < \varrho$ auf Gebiete Δ_ν ab, die die Kreisscheibe $|z| \leqq \frac{1}{2}$ im Innern enthalten. Daraus, sowie aus (2.16), folgt aber

$$\iint\limits_{|w|<\varrho} \left| \frac{\partial(x^{(k_\nu)}, y^{(k_\nu)})}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \iint\limits_{\Delta_\nu} dx\, dy \geqq \iint\limits_{|z|\leqq\frac{1}{2}} dx\, dy = \frac{\pi}{4} \tag{2.35}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$. Durch Grenzübergang $(\nu \to \infty)$ entsteht

$$\iint\limits_{|w|<\varrho} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv \geqq \frac{\pi}{4}, \tag{2.36}$$

im Widerspruch zu (2.32). Damit ist Hilfssatz 6 in allen Teilen bewiesen.

Definition 3. *$\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ ist die Teilmenge aller komplexwertigen Funktionen $z(w)$ aus $\Gamma_1(M_0, M_1)$, für die*

$$z(0) = 0 \tag{2.37}$$

und

$$\iint\limits_{|w|<1} \left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) du\, dv \leqq P < \infty \tag{2.38}$$

ausfällt.

[15]) Man braucht nur

$$a(z) = \begin{cases} h_1(z) & (|z| \leqq 1) \\ h_1(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}, \quad \ldots, \quad \tilde{d}(z) = \begin{cases} \tilde{h}_4(z) & (|z| \leqq 1) \\ \tilde{h}_4(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}$$

zu setzen.

Nunmehr können wir das Hauptresultat dieses Paragraphen in folgender Form aussprechen:

SATZ 2[16]). *Es sei* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$. *Dann gibt es drei feste positive Zahlen* $\lambda_1 = \lambda_1(M_0, M_1, P, r)$, $\lambda_2 = \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)$ *und* $\lambda_3 = \lambda_3(M_0, M_1, P, r)$ *derart, daß für jede Funktion* $z(w) = x(u,v) + i\,y(u,v) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ *die Ungleichungen*

$$|z_u| + |z_v| \leqq \lambda_1(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r), \tag{2.39}$$

$$\left\{ |z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)| \leqq \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)\ |w_2 - w_1|^{\nu} \right. \qquad \left. (|w_1| \leqq r,\ |w_2| \leqq r) \right. \tag{2.40}$$

und

$$|x_u y_v - x_v y_u| \geqq \lambda_3(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r) \tag{2.41}$$

erfüllt sind[17]).

BEWEIS. Für jede Funktion $z = z(w) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gilt die auf LEBESGUE [*17*] zurückgehende Abschätzung[18])

$$|z(w_2) - z(w_1)| \leqq 4 \sqrt{\frac{\pi P}{-\log|w_2 - w_1|}} \qquad (|w_2 - w_1| < 1;\ |w_1|, |w_2| \leqq 1). \tag{2.42}$$

Daraus folgt die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$. Anwendung von Hilfssatz 6 (mit $\Gamma_1^* = \Gamma_2(M_0, M_1, P)$) liefert die Behauptung.

§ 3. Differentialgeometrische Anwendungen (berandete Flächen)

Hauptziel dieses Paragraphen ist die Herleitung neuer a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement. Für unsere Untersuchungen benötigen wir einige Grundformeln der Differentialgeometrie, die wir hier zur Bequemlichkeit des Lesers noch einmal anführen[19]). Dabei verwenden wir die in der Vektoralgebra üblichen Bezeichnungen[20]).

Unter einem regulären Flächenstück $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine in einem Gebiet Ω der uv-Ebene definierte Vektorfunktion

$$\mathfrak{x}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) \tag{3.1}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(I) $x(u,v)$, $y(u,v)$ und $z(u,v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in Ω.

(II) Für $(u,v) \in \Omega$ ist

$$|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| > 0. \tag{3.2}$$

[16]) Dieses Theorem enthält Satz 3 aus [*11*], sowie Theorem 10 und Theorem 11 aus [*12*].

[17]) Auf Grund von Hilfssatz 5 und (2.28) sind die Größen λ_1 und λ_2 in Wahrheit von M_1 unabhängig.

[18]) Vgl. z.B. [*12*], Lemma 16.

[19]) Wegen ausführlicher Beweise sei z.B. auf BLASCHKE [*1*] verwiesen.

[20]) Vgl. z.B. BLASCHKE [*1*], § 1–2.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Flächennormale $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(u, v)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|} \tag{3.3}$$

erklärt und stellt eine in Ω einmal stetig differenzierbare Vektorfunktion dar. Auf $\mathfrak{F}$ betrachten wir die beiden quadratischen Differentialformen

$$ds^2=(d\mathfrak{x})^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{3.4}$$

(erste Fundamentalform) und

$$-d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{N}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \tag{3.5}$$

(zweite Fundamentalform). Aus (3.2)—(3.5) folgt

$$E=\mathfrak{x}_u^2,\qquad F=\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v,\qquad G=\mathfrak{x}_v^2, \tag{3.6}$$

$$EG-F^2=|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|^2>0 \tag{3.7}$$

und

$$L=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{uu},\qquad M=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{uv},\qquad N=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{vv}. \tag{3.8}$$

Das Oberflächenelement von $\mathfrak{F}$ ist

$$do=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{3.9}$$

und die mittlere Krümmung H sowie die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{F}$ sind durch die Ausdrücke

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \tag{3.10}$$

bzw.

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \tag{3.11}$$

erklärt

Für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u, v)$ und die ersten Ableitungen des Normalenvektors $\mathfrak{N}(u, v)$ hat man die Gauß-Weingartenschen Ableitungsgleichungen:

$$\begin{cases}\mathfrak{x}_{uu}=\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+L\,\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{uv}=\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+M\,\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{vv}=\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+N\,\mathfrak{N}\end{cases} \tag{3.12}$$

und

$$\begin{cases}\mathfrak{N}_u=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\mathfrak{x}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\mathfrak{x}_v\\ \mathfrak{N}_v=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\mathfrak{x}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\mathfrak{x}_v.\end{cases} \tag{3.13}$$

Dabei sind $\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}, \ldots, \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}$ die Christoffelschen Symbole

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G E_u + F E_v - 2 F F_u}{2(E G - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{2 E F_u - E E_v - F E_u}{2(E G - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{G E_v - F G_u}{2(E G - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E G_u - F E_v}{2(E G - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{2 G F_v - G G_u - F G_v}{2(E G - F^2)} \\ \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(E G - F^2)}. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ der Fläche $\mathfrak{F}$ in Ω dreimal stetig differenzierbar ist. Dann lauten die Integrabilitätsbedingungen für das System (3.12)–(3.13), also die Gauß-Codazzischen Gleichungen, folgendermaßen:

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{L N - M^2}{E G - F^2} = K \\ \qquad = (E G - F^2)^{-2} \begin{cases} \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ F & G & \frac{1}{2} G_v \\ \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{1}{2} E_v & F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} \end{vmatrix} - \\ \qquad\qquad - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_v \\ F & G & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & 0 \end{vmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$(3.16)\qquad \begin{cases} L_v - M_u = \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} L + \left(\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} \right) M - \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} N \\ M_v - N_u = \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} L + \left(\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} \right) M - \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} N. \end{cases}$$

(3.15) ist das Theorema Egregium von GAUSS, welches besagt, daß K durch die Funktionen E, F und G eindeutig bestimmt ist. Auch wenn keine Realisierung des Linienelements ds^2 durch eine reguläre Fläche $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume vorliegt, bezeichnen wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (3.15) als Gaußsche Krümmung der Differentialform ds^2.

Es sei nun $\mathfrak{F}$ ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung. Wegen $LN - M^2 > 0$ lassen sich dann unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an Stelle von (u, v) neue Variable (α, β) (isotherm-konjugierte

Parameter) so einführen, daß stets

$$-d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{N} = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) \qquad (\lambda \neq 0) \tag{3.17}$$

ausfällt. Wie DARBOUX zuerst erkannt hat, genügen die Funktionen $u(\alpha, \beta)$ und $v(\alpha, \beta)$ einem eigentümlichen System partieller Differentialgleichungen der Form (13) und (14) mit Koeffizienten $h_1, \ldots, \tilde{h}_4$, die nur von der *ersten* Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{F}$ abhängen[21]). Dies ist der Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen. Für unsere Zwecke ist es erforderlich, die Parameter (α, β) *im Großen* einzuführen, was im nächsten Hilfssatz geschehen soll.

HILFSSATZ 7. *Es sei* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ $\big((u, v) \in \Omega\big)$ *ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung* $K(u, v)$. *Außerdem seien die Koeffizienten* $E(u, v)$, $F(u, v)$ *und* $G(u, v)$ *des Linienelementes* ds^2 *von* $\mathfrak{F}$ *für* $(u, v) \in \Omega$ *viermal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jeder in* Ω *enthaltenen Kreisscheibe* $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqq \varrho^2$ *ein Paar reeller Funktionen* $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *mit folgenden Eigenschaften*:

(I) $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *sind für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *zweimal stetig differenzierbar und bilden die Kreisscheibe* $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ *eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe* $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqq \varrho^2$ *ab. Außerdem ist* $u(0, 0) = u_0$, $v(0, 0) = v_0$ *und*

$$u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha \neq 0 \tag{3.18}$$

für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

(II) $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *genügen für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *den partiellen Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \Delta u + \left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \\ \quad + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{K_v}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

und

$$\begin{cases} \Delta v + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \\ \quad + \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{K_v}{2K}\right)(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

(III) *Für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *gelten die Darstellungen*

$$L = \sqrt{K}\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}, \tag{3.21}$$

$$M = -\sqrt{K}\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.22}$$

und

$$N = \sqrt{K}\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \tag{3.23}$$

[21]) Siehe [6], § 725. Diese fundamentale Tatsache wurde bereits von H. LEWY bei der Lösung des Weylschen Problems für den Fall einer analytischen Metrik benutzt (s. [21], insbes. S. 106).

BEWEIS. Nach einem Theorem von L. NIRENBERG ([23], S. 349) ist der Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ von $\mathfrak{F}$ dreimal stetig differenzierbar, und die dritten Ableitungen von $\mathfrak{x}(u, v)$ genügen in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich $\tilde{\Omega}$ von Ω einer Hölder-Bedingung. Somit sind auch die zweiten Fundamentalgrößen L, M und N von $\mathfrak{F}$ in Ω stetig differenzierbar und besitzen in $\tilde{\Omega}$ hölderstetige erste Ableitungen. Daraus, sowie aus $LN - M^2 > 0$, folgt die Existenz zweier reeller Funktionen $u = u(\alpha, \beta)$ und $v = v(\alpha, \beta)$, die

1. die Eigenschaften (I) besitzen,

2. für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ den partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.24}$$

und

$$\Delta v = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.25}$$

genügen und

3. die Gleichungen

$$\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}, \tag{3.26}$$

$$\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}} = -\frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.27}$$

und

$$\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.28}$$

erfüllen[22]). Wendet man jetzt die Gauß-Codazzischen Gln. (3.15)—(3.16) an, so erhält man aus (3.24)—(3.28) die Behauptungen (II) und (III) unseres Hilfssatzes[23]). Damit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Unser nächstes Ziel besteht darin, das Dirichletsche Integral

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta$$

nach oben abzuschätzen. Es gilt der folgende

HILFSSATZ 8. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt. Außerdem sei*

$$|E|, \quad |F|, \quad |G| \leqq \eta^+ < \infty, \tag{3.29}$$

$$EG - F^2 \geqq \eta^- > 0 \tag{3.30}$$

und

$$K \geqq \varkappa > 0 \tag{3.31}$$

[22]) Siehe [13], Lemma 2.

[23]) Zu diesem letzten Schritt des Beweises vgl. [13], S. 39—42.

für $(u, v) \in \Omega$. *Dann gilt für die in Hilfssatz 7 erklärten Abbildungsfunktionen* $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *die Ungleichung*

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 - v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \varkappa} \cdot \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \tag{3.32}$$

Beweis. Zunächst entnimmt man aus (3.10) und aus den Darstellungen (3.21)–(3.23) für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$ den Ausdruck

$$H = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \tag{3.33}$$

Es sei nun R eine beliebige positive Zahl mit $R < 1$, und $\mathfrak{G}$ sei das bei der Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ entstehende Bildgebiet der Kreisscheibe $\alpha^2 + \beta^2 < R^2$. Dann erhält man aus (3.33) die Gleichung

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do = \tfrac{1}{2} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} \sqrt{K}\, [E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)]\, d\alpha\, d\beta. \tag{3.34}$$

Ferner gilt wegen (3.29)–(3.31) für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\sqrt{K}\, [E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)] \\ &\qquad \geqq \frac{\eta^- \sqrt{\varkappa}}{2\eta^+} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Trägt man diese in (3.34) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \\ &\leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \varkappa} \iint\limits_{\Omega} |H|\, do = \frac{4\eta^+}{\eta^- \varkappa} \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Durch Grenzübergang $(R \to 1)$ ergibt sich schließlich (3.32), womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

Aus den letzten beiden Hilfssätzen und den Resultaten von § 2 erhält man die gesuchten a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ einer Fläche durch ihre erste Fundamentalform. Dabei ziehen wir beliebige reguläre Flächenstücke $\mathfrak{F}$ in Betracht, deren Gaußsche Krümmung positiv ist und für die $\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do < \infty$ ausfällt. Unser Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Satz 3. Voraussetzungen:

(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ $\big((u, v) \in \Omega\big)$ *ist der Ortsvektor eines regulären Flächenstückes* $\mathfrak{F}$ *mit dem Linienelement*

$$ds^2 = (d\mathfrak{x})^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{3.37}$$

Dabei sind die Funktionen $E(u,v)$, $F(u,v)$ und $G(u,v)$ in Ω viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq a, \tag{3.38}$$

$$|E_u|,\ \ldots,\ |G_v| \leqq a, \tag{3.39}$$

$$|E_{uu}|,\ \ldots,\ |G_{vv}| \leqq a, \tag{3.40}$$

$$|E_{uuu}|,\ \ldots,\ |G_{vvv}| \leqq a \tag{3.41}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{3.42}$$

mit einer festen positiven Konstanten a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung $K(u,v)$ von ds^2 gilt die Ungleichung*

$$K(u,v) \geqq b > 0 \qquad \big((u,v) \in \Omega\big). \tag{3.43}$$

(III) *Es ist*

$$\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{3.44}$$

wobei H die mittlere Krümmung von $\mathfrak{F}$ bedeutet.

BEHAUPTUNG. *Für $\varrho > 0$ und $0 < \nu < 1$ gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|, \ldots, |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a,b,c,\varrho) < \infty \qquad \big((u,v) \in \Omega_\varrho\big) \tag{3.45}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2,v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1,v_1)| \\ \qquad\vdots \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2,v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1,v_1)| \end{array}\right\} \leqq \tau_1 \cdot \big(\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}\big)^\nu \tag{3.46}$$

$$\big((u_1,v_1) \in \Omega_\varrho,\ (u_2,v_2) \in \Omega_\varrho\big)$$

mit $\tau_1 = \tau_1(a,b,c,\varrho,\nu) < \infty$.

BEWEIS. Es sei (u_0, v_0) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ, und es sei $(\alpha,\beta) \to (u,v)$ die in Hilfssatz 7 erklärte Abbildung. Die Funktionen

$$\xi(\alpha,\beta) = \frac{u(\alpha,\beta) - u_0}{\varrho} \tag{3.47}$$

und

$$\eta(\alpha,\beta) = \frac{v(\alpha,\beta) - v_0}{\varrho} \tag{3.48}$$

führen dann die Kreisscheibe $\alpha^2+\beta^2 \leqq 1$ eineindeutig und stetig in die Kreisscheibe $\xi^2+\eta^2 \leqq 1$ über, und es gilt $\xi(0,0) = \eta(0,0) = 0$ sowie $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$ $(\alpha^2+\beta^2 < 1)$. Außerdem gelten auf Grund von (3.19) und (3.20) die Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\xi = h_1(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + h_2(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\alpha + \xi_\beta\eta_\beta) + \\ \qquad + h_3(\xi,\eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + h_4(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.49}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\eta = \tilde{h}_1(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + \tilde{h}_2(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\alpha + \xi_\beta\eta_\beta) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(\xi,\eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + \tilde{h}_4(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.50}$$

mit

$$(3.51)\qquad \begin{cases} h_1(\xi,\eta) = -\varrho\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\} + \frac{K_u}{2K}\right) \\ h_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\} + \frac{K_v}{2K}\right) \\ h_3(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\} \\ h_4(\xi,\eta) = 0 \end{cases}$$

und

$$(3.52)\qquad \begin{cases} \tilde{h}_1(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} \\ \tilde{h}_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} + \frac{K_u}{2K}\right) \\ \tilde{h}_3(\xi,\eta) = -\varrho\left(\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} + \frac{K_v}{2K}\right) \\ \tilde{h}_4(\xi,\eta) = 0. \end{cases}$$

Aus (3.51) und (3.52) folgt

$$(3.53)\qquad \begin{cases} \omega_1(\xi,\eta) = \tilde{h}_1(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} \\ \omega_2(\xi,\eta) = h_1(\xi,\eta) - \tilde{h}_2(\xi,\eta) = \varrho\left(2\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\right) \\ \omega_3(\xi,\eta) = h_2(\xi,\eta) - \tilde{h}_3(\xi,\eta) = \varrho\left(\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\right) \\ \omega_4(\xi,\eta) = h_3(\xi,\eta) = -\varrho\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}^{24}). \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Gln. (3.14)–(3.15) und macht von den Abschätzungen (3.38)–(3.43) Gebrauch, so erhält man aus (3.51)–(3.53) für $\xi^2+\eta^2 \leqq 1$ die Ungleichungen

$$(3.54)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(|h_\nu(\xi,\eta)| + |\tilde{h}_\nu(\xi,\eta)|\right) < M_0 = M_0(a,b,\varrho) < \infty$$

und

$$(3.55)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(\left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\xi}\right| + \left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\eta}\right|\right) < M_1 = M_1(a,\varrho) < \infty.$$

Ferner hat man wegen Hilfssatz 8 die Abschätzung

$$(3.56)\qquad \begin{aligned} &\iint_{\alpha^2+\beta^2<1} (\xi_\alpha^2+\eta_\alpha^2+\xi_\beta^2+\eta_\beta^2)\,d\alpha\,d\beta \\ &= \frac{1}{\varrho^2}\iint_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2+v_\alpha^2+u_\beta^2+v_\beta^2)\,d\alpha\,d\beta \\ &\leqq \frac{4a^2}{\varrho^2\sqrt{b}}\iint_{\mathfrak{F}} |H|\,do \leqq \frac{4a^2c}{\varrho^2\sqrt{b}} = P = P(a,b,c,\varrho) < \infty. \end{aligned}$$

[24]) In den Ausdrücken auf den rechten Seiten von (3.51)–(3.53) sind die Größen u, v durch die Variablen ξ, η mit Hilfe der Substitution $u = u_0 + \varrho\xi$, $v = v_0 + \varrho\eta$ auszudrücken.

Hieraus schließt man, daß die Funktion

$$\zeta(\gamma) = \xi(\alpha, \beta) + i\,\eta(\alpha, \beta) \qquad (\gamma = \alpha + i\,\beta) \tag{3.57}$$

zur Klasse $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gehört (vgl. Definition 3). Ferner gelten wegen (3.21)—(3.23) für $|\gamma| < 1$ die Darstellungen

$$L = \sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2}{\xi_\alpha\,\eta_\beta - \xi_\beta\,\eta_\alpha}, \tag{3.58}$$

$$M = -\sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\xi_\alpha\,\eta_\alpha + \xi_\beta\,\eta_\beta}{\xi_\alpha\,\eta_\beta - \xi_\beta\,\eta_\alpha} \tag{3.59}$$

und

$$N = \sqrt{K} \cdot \sqrt{E\,G F^2 -} \cdot \frac{\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2}{\xi_\alpha\,\eta_\beta - \xi_\beta\,\eta_\alpha}, \tag{3.60}$$

und aus (3.38)—(3.42) entnimmt man eine Ungleichung der Form

$$K(u, v) \leqq k(a) < \infty \qquad \big((u, v) \in \Omega\big). \tag{3.61}$$

Setzt man $\gamma = 0$ und wendet Satz 2 auf die Abbildung $\gamma \to \zeta(\gamma)$ an, so erhält man aus (3.58)—(3.60) für $(u, v) \in \Omega_\varrho$ die Abschätzungen

$$|L|, \ldots, |N| \leqq \tau_0'(a, b, c, \varrho) \tag{3.62}$$

mit

$$\tau_0'(a, b, c, \varrho) = \sqrt{k(a)} \cdot a \cdot \frac{\lambda_1(M_0, M_1, P, 0)^2}{\lambda_3(M_0, M_1, P, 0)} < \infty. \tag{3.63}$$

Jetzt sei (u_1, v_1) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ mit $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \leqq \frac{\varrho^2}{4}$, und es sei $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ derjenige Punkt der Kreisscheibe $|\gamma| \leqq 1$, der durch die Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ in den Punkt (u_1, v_1) übergeführt wird. Wendet man Satz 2 an und berücksichtigt die Tatsache, daß die Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ für $|\gamma| \leqq 1$ gleichgradig stetig ist, so erhält man Ungleichungen der Form

$$|\gamma_1| \leqq R^+(a, b, c, \varrho) < 1 \tag{3.64}$$

und

$$|\gamma_1| \leqq R^-(a, b, c, \varrho) \cdot \sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} \tag{3.65}$$

mit

$$R^-(a, b, c, \varrho) < \infty. \tag{3.66}$$

Aus den Darstellungen (3.58)—(3.60) sowie den Abschätzungen (3.38)—(3.42) und (3.64)—(3.66) ergeben sich dann durch abermalige Anwendung von Satz 2 die Ungleichungen

$$\left\{ \begin{array}{c} |L(u_1, v_1) - L(u_0, v_0)| \\ \vdots \\ |N(u_1, v_1) - N(u_0, v_0)| \end{array} \right\} \leqq \tau_1' \cdot \big(\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}\big)^\nu \tag{3.67}$$

mit

$$0 < \nu < 1$$

und

$$\tau_1' = \tau_1'(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty. \tag{3.68}$$

Wendet man jetzt die Gaußschen Ableitungsgleichungen (3.12) an, so erhält man aus (3.62) und (3.67) die gesuchten Abschätzungen (3.45) und (3.46), womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

§ 4. Differentialgeometrische Anwendungen (geschlossene Flächen)

In diesem Paragraphen lösen wir das Weylsche Einbettungsproblem für den Fall einer dreimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 (Satz 4). Wir beginnen zunächst mit einigen allgemeinen Bemerkungen über geschlossene Flächen[25]).

Es sei Σ eine kompakte, zweidimensionale, analytische Mannigfaltigkeit. Dann verstehen wir unter einer regulären geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine reelle, auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}=(x, y, z)$, die in den lokalen Koordinaten (u, v) von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und außerdem der Bedingung $|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| > 0$ genügt. Im folgenden setzen wir stets Σ als orientierbar voraus. Dann sind der Normalenvektor $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$ und folglich auch die Krümmungsgrößen K und H eindeutig durch die Gln. (3.3) bzw. (3.10)—(3.11) definiert.

Für unsere späteren Überlegungen benötigen wir eine auf Minkowski zurückgehende Integralformel, die wir zur Bequemlichkeit des Lesers hier noch einmal beweisen.

Hilfssatz 9. *Für jede reguläre, geschlossene, orientierbare Fläche $\mathfrak{F}$ gilt die Gleichung*

$$\iint_{\mathfrak{F}} H\, do = -\iint_{\mathfrak{F}} (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N})\, K\, do. \tag{4.1}$$

Beweis[26]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist. Dann stellt

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,d\mathfrak{N}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u)\,du + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v)\,dv \tag{4.2}$$

ein invariantes Differential auf Σ dar, und es gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u) = 2(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{N}_v) - \{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{N}_v\,\mathfrak{N}) - (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{N})\}. \tag{4.3}$$

Durch Anwendung der Weingartenschen Ableitungsgleichungen folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}_u) = 2\{K(\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}) + H\}\,|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|. \tag{4.4}$$

Integriert man (4.4) über Σ, so erhält man die gesuchte Integralformel (4.1), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Von nun an setzen wir stets voraus, daß Σ der Einheitskugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ homöomorph ist und daß die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{F}$ überall positiv ausfällt. Dann gilt bekanntlich die Gleichung

$$\iint_{\Sigma} K\, do = 4\pi, \tag{4.5}$$

[25]) Vgl. dazu H. Hopf [15], Kap. II.

[26]) Vgl. dazu Herglotz [14].

und nach einem Theorem von HADAMARD [9][27]) ist $\mathfrak{F}$ eine Eifläche, d.h. K ist positiv, und $\mathfrak{F}$ ist Rand eines konvexen Körpers. Unser nächstes Ziel besteht darin, den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ durch das Linienelement ds^2 abzuschätzen. Zu diesem Zweck überdecken wir Σ durch ein zulässiges System von Parameterumgebungen Σ_k $(k=1, \ldots, N)$, die jeweils den Kreisscheiben

$$\Omega_k = \{|w_k| < 1\} \qquad (w_k = u_k + i\, v_k)$$

homöomorph sind. In jedem Parametergebiet Ω_k erscheint dann der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{F}$ als eine gewöhnliche Vektorfunktion $\mathfrak{x}_k(w_k) = \mathfrak{x}_k(u_k, v_k)$, und für zwei Variable $w_k \in \Omega_k$ und $w_l \in \Omega_l$, die denselben Punkt auf Σ repräsentieren, gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k(u_k, v_k) = \mathfrak{x}_l(u_l, v_l) \tag{4.6}$$

und

$$\begin{cases} ds^2 = (d\mathfrak{x}_k)^2 = E_k(u_k, v_k)\, du_k^2 + 2F_k(u_k, v_k)\, du_k\, dv_k + G_k(u_k, v_k)\, dv_k^2 \\ \quad = (d\mathfrak{x}_l)^2 = E_l(u_l, v_l)\, du_l^2 + 2F_l(u_l, v_l)\, du_l\, dv_l + G_l(u_l, v_l)\, dv_l^2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Um unsere Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der in der Funktionalanalysis üblichen Bezeichnungen. Wir sagen, der Vektor $\mathfrak{x}$ bzw. die Metrik ds^2 sei auf Σ p-mal stetig differenzierbar, wenn die Funktionen $\mathfrak{x}_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ bzw. die Koeffizienten $E_k(u, v), \ldots, G_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ für $|w|<1$ p-mal stetig differenzierbar sind. In diesem Fall erklären wir die Normen $||\mathfrak{x}||_p$, $||\mathfrak{x}||_{p+\nu}$ $(0<\nu<1)$ und $||ds^2||_p$ durch die Gleichungen

$$||\mathfrak{x}||_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \leq p} \text{Obere Grenze}_{|w|<1} \left| \frac{\partial^{m+n} \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right|, \tag{4.8}$$

$$||\mathfrak{x}||_{p+\nu} = ||\mathfrak{x}||_p + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n=p} \text{Obere Grenze}_{\substack{|w'|,\,|w''|<1 \\ w' \neq w''}} \frac{\left| \frac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w'') - \frac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w') \right|}{|w'' - w'|^\nu} \tag{4.9}$$

und

$$||ds^2||_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \leq p} \text{Obere Grenze}_{|w|<1} \left(\left| \frac{\partial^{m+n} E_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial^{m+n} G_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| \right). \tag{4.10}$$

Mit diesen so erklärten Normen bilden die auf Σ definierten Vektoren $\mathfrak{x}$ und Metriken ds^2 Banachsche Räume. Nunmehr können wir unsere a-priori-Abschätzungen folgendermaßen formulieren:

HILFSSATZ 10. *Es sei $\mathfrak{F}$ eine reguläre Eifläche mit einer viermal stetig differenzierbaren Metrik $ds^2 = (d\mathfrak{x})^2$. Außerdem gelten die Abschätzungen*

$$||ds^2||_3 \leqq \alpha, \tag{4.11}$$

$$E_k G_k - F_k^2 \geqq \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.12}$$

und

$$K \geqq \alpha^{-1} \tag{4.13}$$

[27]) Weitere Beweise bei HOPF [15], Kap. IV.

mit einer festen positiven Zahl α. *Dann gibt es einen konstanten Vektor* $\mathfrak{y}$ *derart, daß für* $0<\nu<1$ *die Ungleichung*

$$||\mathfrak{x}-\mathfrak{y}||_{2+\nu}\leqq \Phi(\alpha,\nu)<\infty \tag{4.14}$$

erfüllt ist.

Beweis. Zunächst folgt aus (4.11) die Existenz eines konstanten Vektors $\mathfrak{y}$ mit

$$||\mathfrak{x}-\mathfrak{y}||_1\leqq c_0(\alpha)<\infty. \tag{4.15}$$

Ferner läßt sich eine positive Zahl $R<1$ so bestimmen, daß die Parameterumgebungen Σ_k' $(k=1,\ldots,N)$, die den Kreisscheiben $\Omega_k'=\{|w_k|<R\}$ $(k=1,\ldots,N)$ entsprechen, Σ vollständig überdecken. Die Behauptung (4.14) ist bewiesen, wenn es gelingt, Abschätzungen der Form

$$|D^2\mathfrak{x}_k(w)|\leqq\varphi_0(\alpha)<\infty \qquad (k=1,\ldots,N;\ |w|<R) \tag{4.16}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l}|D^2\mathfrak{x}_k(w'')-D^2\mathfrak{x}_k(w')|\leqq\varphi_1(\alpha,\nu)\,|w''-w'|^\nu\\ (k=1,\ldots,N;\ |w'|,|w''|<R;\ 0<\nu<1)\end{array}\right. \tag{4.17}$$

mit $\varphi_1(\alpha,\nu)<\infty$ herzuleiten. Dabei bedeutet $D^2\mathfrak{x}_k$ die Gesamtheit aller partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}_k$. Es seien $\mathfrak{E}_k$ $(k=1,\ldots,N)$ die den Parameterumgebungen Σ_k entsprechenden Flächenstücke auf $\mathfrak{E}$. Wegen Hilfssatz 9 ist dann

$$\left\{\begin{array}{l}\iint\limits_{\mathfrak{E}_k}|H|\,do\leqq\iint\limits_{\mathfrak{E}}|H|\,do=\iint\limits_{\mathfrak{E}}H\,do=\iint\limits_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y},\mathfrak{N})\,K\,do\\ \qquad\leqq\iint\limits_{\mathfrak{E}}|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\,K\,do\leqq\max_{\Sigma}|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\cdot\iint\limits_{\Sigma}K\,do.\end{array}\right. \tag{4.18}$$

Daraus, sowie aus (4.5) und (4.15), folgt

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}_k}|H|\,do\leqq 4\pi c_0(\alpha)<\infty \qquad (k=1,\ldots,N). \tag{4.19}$$

Wendet man jetzt auf die Vektorfunktionen $\mathfrak{x}_k(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$ Satz 3 mit $a=\alpha$, $b=\alpha^{-1}$, $c=4\pi c_0(\alpha)$ und $\varrho=1-R$ an, so erhält man die gesuchten Abschätzungen (4.16) und (4.17), womit unser Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

Satz 4. *Es sei* ds^2 *ein auf der Einheitskugel* Σ *vorgegebenes, dreimal stetig differenzierbares Linienelement, welches überall positiv-definit ist und positive Gaußsche Krümmung besitzt. Dann gibt es eine reguläre Eifläche* $\mathfrak{E}$ *mit* $(d\mathfrak{x})^2=ds^2$. *Außerdem ist* $||\mathfrak{x}||_{2+\nu}<\infty$ *für* $0<\nu<1$.

Beweis. Da ds^2 auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist, so gibt es eine Folge analytischer Metriken ds_n^2 [28]) mit

$$||ds_n^2-ds^2||_3\to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{4.20}$$

[28]) D. h. Metriken ds_n^2 mit Koeffizienten $E_k^{(n)}(u,v)$, $F_k^{(n)}(u,v)$ und $G_k^{(n)}(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$, die für $u^2+v^2<1$ analytisch sind.

Dann lassen sich zwei positive Zahlen n_0 und α so bestimmen, daß für $n \geqq n_0$ die Ungleichungen

$$||ds_n^2||_3 \leqq \alpha, \tag{4.21}$$

$$E_k^{(n)} G_k^{(n)} - F_k^{(n)2} \geqq \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.22}$$

und

$$K^{(n)} \geqq \alpha^{-1} \tag{4.23}$$

erfüllt sind[29]). Nach dem Theorem von WEYL-LEWY[30]) existiert dann eine Folge regulärer Eiflächen $\{\mathfrak{E}_n\}$ mit

$$(d\mathfrak{x}^{(n)})^2 = ds_n^2. \tag{4.24}$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 10 an, so entnimmt man aus (4.21)—(4.24) die Existenz einer Folge konstanter Vektoren $\{\mathfrak{y}^{(n)}\}$, so daß für $n \geqq n_0$ und $0 < \nu < 1$ die Ungleichung

$$||\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}||_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.25}$$

erfüllt ist. Man setze $\mathfrak{z}^{(n)} = \mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}$. Dann wird

$$(d\mathfrak{z}^{(n)})^2 = ds_n^2 \tag{4.26}$$

und

$$||\mathfrak{z}^{(n)}||_{2+\nu} < \Phi(\alpha, \nu). \tag{4.27}$$

Wegen (4.27) gibt es eine Teilfolge $\{n_j\}$ der natürlichen Zahlen und eine auf Σ zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion $\mathfrak{z}$ mit

$$||\mathfrak{z}^{(n_j)} - \mathfrak{z}||_2 \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{4.28}$$

Daraus, sowie aus (4.27), folgt

$$||\mathfrak{z}||_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.29}$$

für $0 < \nu < 1$. Setzt man nun $n = n_j$ in (4.26) und geht zur Grenze $(j \to \infty)$ über, so entsteht

$$(d\mathfrak{z})^2 = ds^2, \tag{4.30}$$

womit Satz 4 vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. Berlin: Springer 1930. — [2] BUSEMANN, H.: Convex Surfaces. New York: Interscience Publishers 1958. — [3] CARATHÉODORY, C.: Conformal Representation. Cambridge 1952. — [4] CARLEMAN, T.: Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre a deux variables. Comptes Rendus Paris **197**, 471—474 (1933). — [5] CHERN, S. S.: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 279—290 (1945). — [6] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, III. Paris 1894. — [7] EFIMOV, N. W.: Flächenverbiegung

[29]) $K^{(n)}$ ist die Gaußsche Krümmung von ds_n^2.

[30]) Siehe S. 129 dieser Arbeit.

im Großen (mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer). Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [8] Fenchel, W.: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr. (B) 66—87 (1932.) — [9] Hadamard, J.: Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. J. de Math. pures et appl. **3**, 331—387 (1897). — [10] Hartman, P., and A. Wintner: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449—476 (1953). — [11] Heinz, E.: Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Annalen **131**, 411—428 (1956). — [12] Heinz, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Math. **5**, 197—271 (1956/57). — [13] Heinz, E.: On elliptic Monge-Ampère equations and Weyl's embedding problem. J. d'Analyse Math. **7**, 1—52 (1959). — [14] Herglotz, G.: Über die Starrheit der Eiflächen. Abhandlungen math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 127—129 (1943). — [15] Hopf, H.: Lectures on Differential Geometry in the Large. Applied Math. and Stat. Laboratory, Stanford University, Stanford, California 1956. — [16] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [17] Lebesgue, H.: Sur le problème de Dirichlet. Rend. del Circ. Mat. di Palermo **24**, 371—402 (1907). — [18] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. I. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 417—434 (1935). — [19] Lewy, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. II. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 365—374 (1937). — [20] Lewy, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 689—692 (1936). — [21] Lewy, H.: On the existence of a closed surface realizing a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24**, Nr. 2, 104—106 (1938). — [22] Nirenberg, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure and Appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [23] Nirenberg, L.: The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large. Comm. Pure and Appl. Math. **6**, 337—394 (1953). — [24] Pogorelow, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [25] Weyl, H.: Über die Bestimmung einer geschlossenen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich **61**, 40—72 (1916), wiederabgedruckt in Selecta Hermann Weyl, Basel u. Stuttgart, 148—178 (1956). — [26] Wintner, A.: On Weyl's imbedding problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, Nr. 3, 157—160 (1956). — [27] Wintner, A.: On Weyl's identity in the differential geometry of surfaces. Ann. di Mat. Pura ed Appl. Ser. IV, **41**, 257—268 (1956).

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 29. Dezember 1959)

Collatz, L.
Math. Zeitschr. 74, 158–166 (1960)

Monotone Operatoren bei Anfangswertaufgaben von Differentialgleichungen

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Lothar Collatz

In der praktischen Analysis benutzt man zur angenäherten Lösung einer in einem Banachschen Raum gegebenen Gleichung $u = Tu$ häufig Iterationsverfahren, bei denen man, ausgehend von einem Element $u_{(0)}$ oder von zwei Elementen $u_{(0)}$, $u_{\langle 0\rangle}$ weitere Elemente nach

$$(1) \qquad u_{(n+1)} = T u_{(n)}, \qquad u_{\langle n+1\rangle} = T u_{\langle n\rangle} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

bestimmt. Im Reellen beobachtet man dabei oft die Erscheinungen monotonen oder alternierenden Verhaltens der Näherungsfolgen, vgl. [1], [3], [8], [9]. In diesen Fällen hat man dann sofort eine exakte Einschließungsaussage für die gesuchte Lösung. Es mag daher berechtigt erscheinen, nach möglichst allgemeinen Problemklassen zu fragen, bei welchen ein solch einfacher Einschließungssatz gilt. In [3] wurden die Sätze auf Randwertaufgaben angewandt, daher sollen hier hauptsächlich Anfangswertaufgaben betrachtet werden.

Es sei erwähnt, daß sich mit etwas mehr Rechenaufwand Einschließungsaussagen auch in dem Falle gewinnen lassen, daß der Operator T die Summe oder Differenz zweier monotoner Operatoren ist (J. Schröder [11]).

1. Monotone Operatoren

$w_1, \ldots, w_m$ seien (gesuchte) Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ in einem Bereich D des x_k Raumes R_n; in Vektorschreibweise sei $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $x, \xi, \ldots$ Punkte von R_n.

I. Es sei eine Integraltransformation T gegeben, die jedem Vektor w aus einem Bereich $\mathfrak{D}$ einen Vektor $v = (v_1, \ldots, v_m) = Tw$ zuordnet nach

$$(2) \qquad v_j(x) = z_j(x) + \int_{B_{x,j}} \varphi_j\big(\xi, w_k(\xi)\big)\, G_j(x, \xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

z_j, φ_j und G_j sind gegebene Funktionen ihrer Elemente, über die außer der Voraussetzung der Existenz des Integrals in (2) noch weitere Voraussetzungen getroffen werden. $B_{x,j}$ sind noch genauer anzugebende, möglicherweise vom jeweils betrachteten Punkte x abhängige, in D liegende Bereiche. Bei Randwertaufgaben wird $B_{x,j}$ gewöhnlich das gesamte Grundgebiet bedeuten und dann nicht von x abhängen. Bei Anfangswertaufgaben sei etwa B_0 der Durchschnitt von D mit der Hyperebene $x_1 = 0$ und es seien auf B_0 die Werte $\bar{u}_j$

für u_j vorgeschrieben. Alle vorkommenden Größen seien reell. Gefragt wird nach den Fixpunkten der Transformation T, d. h. nach Lösungen $u=(u_1,\ldots,u_m)$ von

$$u = Tu. \tag{3}$$

Zur Lösung wird das Iterationsverfahren (1) benutzt. Zur Anwendung der allgemeinen Sätze wird in dem Raum $\mathfrak{R}$ der Vektoren w eine Halbordnung betrachtet. Es sei für gewisse Vektoren $w, \tilde{w}$ (mit den Komponenten $w_j, \tilde{w}_j$) sinnvoll, $w \gtrless \tilde{w}$ zu schreiben, und zwar mögen die Indizes $1,\ldots,m$ in zwei Klassen K_1, K_2 eingeteilt sein und es möge $w \gtrless \tilde{w}$ bedeuten [1])

$$w_i \gtrless \tilde{w}_i \text{ im gewöhnlichen Sinne für } i \in K_1$$
$$w_i' \lesseqgtr \tilde{w}_i' \text{ im gewöhnlichen Sinne für } i' \in K_2.$$

Der Operator T heißt [1], [5], [6], [8] monoton $\left\{\begin{matrix}\text{nichtfallend}\\ \text{nichtwachsend}\end{matrix}\right\}$, falls $\left\{\begin{matrix}Tw \gtrless T\tilde{w}\\ Tw \lesseqgtr T\tilde{w}\end{matrix}\right\}$ gilt für $w \gtrless \tilde{w}$ und $w, \tilde{w} \in \mathfrak{D}$.

Weiter werden Normen benötigt: Für die Punkte x, ξ von D sei ein Abstand $|x-\xi|$ definiert, und für die Vektoren w aus R genügt hier als Norm die einfache Maximal-Betragsnorm:

$$\|w\| = \sum_{\nu=1}^{n} \sup_{B} |w_\nu|, \tag{4}$$

wobei B ein fester beschränkter echter oder unechter Teil von D sei. Mit dieser Norm bilden die Vektoren w in B einen Banachschen Raum.

Nun wird weiter vorausgesetzt:

II. Es sei $G_j(x,\xi) \gtrless 0$ für $x \in D$, $\xi \in D$. Es seien φ_j nach den u_k partiell differenzierbare Funktionen und es gelte (bei G_j und bei den Ableitungen der φ_j mögen die Zeichen $\gtrless 0$, $\lesseqgtr 0$ die gewöhnliche Bedeutung haben):

IIa) $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \gtrless 0$, für $i,k = 1,\ldots,m$; dann ist T monoton nichtfallend

oder

IIb) $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \lesseqgtr 0$ für $i,k = 1,\ldots,m$; dann ist T monoton nichtwachsend

oder

IIc) $$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \gtrless 0, & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i'} \lesseqgtr 0\\ \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i} \lesseqgtr 0, & \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i'} \gtrless 0\end{matrix}\right\} \text{ für } \begin{matrix} i,k \in K_1 \\ i',k' \in K_2\end{matrix}; \text{ dann ist } T \text{ monoton nichtfallend}$$

oder

IId) $$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \lesseqgtr 0, & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial u_i'} \gtrless 0\\ \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i} \gtrless 0, & \dfrac{\partial \varphi_k'}{\partial u_i'} \lesseqgtr 0\end{matrix}\right\} \text{ für } \begin{matrix} i,k \in K_1 \\ i',k' \in K_2\end{matrix}; \text{ dann ist } T \text{ monoton nichtwachsend.}$$

[1]) Gleichwertig damit wäre es, $w \gtrless \tilde{w}$ als $w_i \gtrless \tilde{w}_i$ für $i \in K_1$ und $-w_i' \gtrless -\tilde{w}_i'$, für $i' \in K_2$ zu definieren.

Die Voraussetzungen über die Ableitungen können auch durch Monotoniebedingungen ersetzt werden, z.B. statt $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \geqq 0$ kann vorausgesetzt werden, daß die Funktion φ_k in der Veränderlichen u_i monoton nicht fällt.

2. Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes

Sind w, $\tilde{w}$ zwei Vektoren aus R mit $w \leqq \tilde{w}$, so bezeichnet das „Intervall" $\langle w, \tilde{w} \rangle$, die stets konvexe und abgeschlossene Menge aller Vektoren y aus R mit $w \leqq y \leqq w$. Nun mögen überdies $w, \tilde{w}$ zu $\mathfrak{D}$ gehören.

III. Vom Operator T wird nun vorausgesetzt, daß er ein solches Intervall $\langle w, \tilde{w} \rangle$ in eine kompakte Menge abbildet. Eine Menge $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$ heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{S}$ ein Häufungselement besitzt, welches zwar nicht notwendig zu $\mathfrak{S}$, aber zu $\mathfrak{R}$ gehören soll. Für verschiedene Typen von Randwertaufgaben ist in [3] gezeigt worden, daß diese Voraussetzung erfüllt ist; daß sie aber auch bei vielen Klassen von Anfangswertaufgaben gilt, kann man so einsehen: Alle Funktionen w_k, z_j, φ_j, G_j seien stetig. Es sei nun B ein beschränkter fester abgeschlossener Teilbereich von D mit dem Inhalt F_0. Für $x, \xi \in B$ sind alle G_j beschränkt. Es sei dort $|G_j| \leqq G_0$. Jedem Punkte $x \in B$ sind bereiche $B_{x,j}$, die in B liegen, mit den Inhalten $F_{x,j}$ zugeordnet und es hängen $F_{x,j}$ stetig von x ab. Bei zwei gegebenen Funktionen $w, \tilde{w}$ ist auch φ_j für alle y aus $\langle w, \tilde{w} \rangle$ beschränkt, es gelte $|\varphi_j| \leqq \Phi_0$, wobei Φ_0 von w und $\tilde{w}$ abhängt. Ferner sei $|z_j| \leqq Z_0$ in B. Die Elemente Ty sind gleichmäßig beschränkt, denn nach (2) ist $|v_j| \leqq Z_0 + F_0 \Phi_0 G_0$. Ferner sind sie gleichgradig stetig; denn für zwei Punkte $x, x' \in B$ gilt

$$v_j(x) - v_j(x') = z_j(x) - z_j(x') + \int\limits_{B_{x,j}} \varphi_j\left(\xi, w_k(\xi)\right) \left[G_j(x,\xi) - G_j(x',\xi)\right] d\xi -$$

$$- \int\limits_{B_{x',j} - B_{x,j}} \varphi_j\left(\xi, u_k(\xi)\right) G_j(x',\xi)\, d\xi,$$

$$|v_j(x) - v_j(x')| \leqq |z_j(x) - z_j(x')| + \Phi_0 \int\limits_{B_{x,j}} |G_j(x,\xi) - G_j(x',\xi)|\, d\xi +$$

$$+ \Phi_0 G_0 |F_{x',j} - F_{x',j}|.$$

Auf der rechten Seite geht für $x' \to x$ jeder der 3 Terme einzeln gegen Null, da z_j, $F_{x,j}$, G_j innerhalb des abgeschlossenen beschränkten Bereiches B, also auch in $B_{x,j}$ stetig, also sogar gleichmäßig stetig sind. Man kann nun aber aus einer gleichmäßig beschränkten und gleichgradig stetigen Funktionenmenge eine gleichmäßig, also im Sinne der Norm (4) gegen ein Element aus R konvergente Folge auswählen.

Ferner ist der Operator T stetig, wie sich unmittelbar aus der Stetigkeit von φ_j ergibt.

IV. Es sei gelungen, nach dem Iterationsverfahren (1) Elemente $u_{(0)}$, $u_{(1)}$, $u_{\langle 0 \rangle}$, $u_{\langle 1 \rangle}$ mit den Eigenschaften aufzustellen:

IV A. Wenn der Operator T monoton nichtfallend ist, sei

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 0 \rangle}, \quad u_{(0)} \leqq u_{(1)}, \quad u_{\langle 1 \rangle} \leqq u_{\langle 0 \rangle}. \tag{5}$$

IV B. Wenn T monoton nichtwachsend ist, sei

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 0\rangle}, \quad u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle}, \quad u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}. \tag{6}$$

Dann bildet T die Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ in sich ab.

Es sei nämlich y ein Element mit $u_{(0)} \leqq y \leqq u_{\langle 0\rangle}$, dann gilt im Falle IV A

$$u_{(0)} \leqq u_{(1)} = T u_{(0)} \leqq T y \leqq T u_{\langle 0\rangle} = u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{\langle 0\rangle} \tag{7}$$

und im Falle IV B gilt

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle} = T u_{\langle 0\rangle} \leqq T y \leqq T u_{(0)} = u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}, \tag{8}$$

d.h. Ty gehört wieder der Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ an.

Nun ist der Schaudersche Fixpunktsatz anwendbar [7], [4]: Wenn ein stetiger Operator T eine konvexe abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ eines Banachschen Raumes in sich abbildet und $T\,\mathfrak{M}$ kompakt ist, so besitzt T in $\mathfrak{M}$ einen Fixpunkt u mit $Tu = u$. Als Menge $\mathfrak{M}$ kann im vorliegenden Falle die Menge $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ genommen werden, und es gilt daher nach [8], [3] der

Satz. *Unter den Voraussetzungen* I *bis* IV *besitzt der Operator* T *in der Menge* $\langle u_{(0)}, u_{\langle 0\rangle}\rangle$ *eine Lösung* u *der Gl.* (3) *und es gilt im Falle* IV A *des monoton nichtfallenden Operators*

$$u_{(0)} \leqq u_{(1)} \leqq u_{(2)} \leqq \cdots \leqq u \leqq \cdots \leqq u_{\langle 2\rangle} \leqq u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{\langle 0\rangle} \tag{9}$$

und im Falle IV B *des monoton nichtwachsenden Operators*

$$u_{(0)} \leqq u_{\langle 1\rangle} \leqq u_{(2)} \leqq u_{\langle 3\rangle} \leqq \cdots \leqq u \leqq \cdots \leqq u_{(3)} \leqq u_{\langle 2\rangle} \leqq u_{(1)} \leqq u_{\langle 0\rangle}. \tag{10}$$

Im Falle IV A *konvergieren die* $u_{(n)}$ *und die* $u_{\langle n\rangle}$ *für* $n \to \infty$ *gegen die Lösung* u, *im Falle* IV B *ist diese Konvergenz nur unter Zusatzvoraussetzungen bewiesen* [3].

Es sollen nun einige Klassen von Anfangswertaufgaben betrachtet werden, bei denen man die Voraussetzungen I bis III bequem nachprüfen kann. Die Voraussetzung IV ist eine Angelegenheit der Erfahrung dessen, der eine bestimmte vorgelegte Aufgabe zu behandeln hat. Die Formulierung der Voraussetzungen ist oben bereits so getroffen worden, daß es sich erübrigt, hier im Text die Bedingungen I bis III in jedem einzelnen Falle nachzuprüfen.

3. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{11}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{12}$$

kann in mannigfacher Weise auf eine Form (2) gebracht werden. Man kann den Vektor w mit den Komponenten $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ einführen und kann für die Ableitungen die Formeln verwenden

$$y^{(q)}(x) = \sum_{r=0}^{s} y_0^{(q+r)} \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^s}{s!}\, y^{(q+s+1)}(\xi)\, d\xi, \tag{13}$$

$$y^{(q)}(x) = \sum_{r=0}^{n-q-1} y_0^{(q+r)} \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}\, f\big(\xi, y(\xi), \ldots, y^{(n-1)}(\xi)\big)\, d\xi. \tag{14}$$

Dabei geht (14) aus (13) hervor, indem man für $s=n-q-1$ im Integral die Differentialgleichung (11) benutzt. Für y und jede Ableitung kann jeweils eine der Gln. (13) und (14) ausgewählt werden. Man hat somit insgesamt $n!$ verschiedene Möglichkeiten. Ferner kann man jeweils auf 2^n verschiedene Weise die Klasseneinteilung mit K_1, K_2 vornehmen und die Bedeutung von $w \gtrless \tilde{w}$ nach Nr. 1 festlegen, so daß insgesamt $n!\ 2^n$ Möglichkeiten entstehen, von denen freilich nur ein Teil in eines der Schemata IIa bis IId paßt.

Für die folgende Diskussion ist es zweckmäßig, die verschiedenen Möglichkeiten durch eine einfache Symbolik zu charakterisieren. Die Festlegung des Operators erfolge durch ein Symbol aus n Zeichen (Zahlen oder der Buchstabe f) in Klammern eingeschlossen, wobei sich das k-te Zeichen auf die Integrationsformel für $y^{(k-1)}$ bezieht und eine Zahl p bedeutet, daß für $y^{(k-1)}$ die Formel (13) mit $s=p$, und der Buchstabe f bedeutet, daß für $y^{(k-1)}$ die Formel (14) zu verwenden ist, z.B. soll $(1, 0, f)$ bedeuten, daß für y selbst Formel (13) mit $q=0$, $s=1$ benutzt wird. An letzter Stelle in einem solchen Symbol steht stets f, an vorletzter Stelle kann nur f oder 0 stehen usw. Ein zweites Symbol besteht aus n Zeichen ($>$ oder $<$), wobei das an k-ter Stelle stehende Zeichen angibt: „$>$“ soll in der Definition $y^{(k-1)} \geqq \tilde{y}^{(k-1)}$ und „$<$“ soll $y^{(k-1)} \leqq \tilde{y}^{(k-1)}$ bedeuten.

Es mögen nun die Fälle $n=2, 3, 4$ etwas genauer betrachtet werden, wobei noch zur Abkürzung

$$Y_k = \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}, \qquad y = y^{(0)} \tag{15}$$

gesetzt wird.

4. Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung

$n=2$. Es kommt in der Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$ entscheidend auf die Vorzeichen von

$$Y_0 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad Y_1 = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Tabelle für $n=2$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f	Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrless \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton, und zwar
$Y_0 \geqq 0, Y_1 \geqq 0$	(f, f)	$(>, >)$	IIa	nichtfallend
	$(0, f)$	$(>, >)$	IIa	nichtfallend
$Y_0 \geqq 0, Y_1 \leqq 0$	$(0, f)$	$(>, <)$	IId	nichtwachsend
$Y_0 \leqq 0, Y_1 \leqq 0$	(f, f)	$(>, >)$	IIb	nichtwachsend

an. In drei von den möglichen vier Fällen (Y_0, Y_1 nichtpositiv oder nichtnegativ) gibt es teilweise verschiedene Möglichkeiten, die Voraussetzungen II zu erfüllen. (Es erschien nicht nötig, alle Möglichkeiten aufzuführen. Es liegen auch noch nicht genügend Erfahrungen vor, um sagen zu können, welche Möglichkeit jeweils für einen vorliegenden Fall am meisten zu empfehlen ist.) Das Schema ist zur bequemeren Anwendbarkeit geordnet nach den Vorzeichen von Y_0, Y_1.

Daß der Fall $Y_0 \leqq 0$, $Y_1 \geqq 0$ nicht auftritt, liegt in der Natur der Sache; denn in diesem Falle können kompliziertere Erscheinungen auftreten, wie man an dem Beispiel $y'' = -y + y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ sehen kann. Die Definition $(0, f)$ lautet hier für den Operator T, wenn $y' = z$ gesetzt wird:

$$T\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^x \begin{pmatrix} z(\xi) \\ -y(\xi) + z(\xi) \end{pmatrix} d\xi .$$

Ausgehend von $u_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man als Folge der Iterierten

$$u_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}, \quad u_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2!}x^2 \\ -x - & \frac{1}{2!}x^2 \end{pmatrix}, \quad u_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2!}x^2 & -\frac{1}{3!}x^3 \\ -x - & \frac{1}{2!}x^2 & \end{pmatrix}$$

allgemein

$$u_{(n)} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu \\ \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu \end{pmatrix}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{6n} &= \alpha_{6n+5} = \beta_{6n+4} = \beta_{6n+5} = 1 \\ \alpha_{6n+1} &= \alpha_{6n+4} = \beta_{6n} = \beta_{6n+3} = 0 \\ \alpha_{6n+2} &= \alpha_{6n+3} = \beta_{6n+1} = \beta_{6n+2} = -1 \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es sind etwa im Intervall $0 < x \leqq 1$ jeweils y_{6n}, y_{6n+1}, y_{6n+5} größer und y_{6n+2}, y_{6n+3}, y_{6n+4} kleiner als die Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe, die durch $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu$ gegeben ist und natürlich auch elementar ausdrückbar ist. Dieses Verhalten paßt nicht zu den Erscheinungen des monoton nichtfallenden oder nichtwachsenden Operators. Aber bei der Ordnungsdefinition $(>>)$ ist die dritte Potenz von T ein monoton nichtwachsender und die sechste Potenz ein monoton nichtfallender Operator. Es sei etwa T^3 angegeben:

$$T^3\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ -x - & \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} + \int_0^x\int_0^x\int_0^x \begin{pmatrix} -y \\ -z \end{pmatrix} (dx)^3 .$$

$n = 3$ und $n = 4$. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung gewinnt der Fall IId an Bedeutung, wie die Tabelle in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ deutlich zeigt. Es ist natürlich auch hier nicht zu erwarten, daß alle 2^n Vorzeichen-Kombinationen von $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ in die Schemata IIa bis IId passen; ich hoffe aber, in den Tabellen alle bei $n = 3$ und $n = 4$ erfaßbaren Fälle aufgeführt zu haben. Dabei kann in den Spalten „Definition des Operators", wenn in einer Spalte mehrere Symbole untereinander stehen und

Tabelle für $n = 3$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f			Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrsim \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton und zwar
Y_0	Y_1	Y_2				
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_f, \binom{0}{f}, f\right)$	$> > >$	IIa	nichtfallend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{1}{f}, 0, f\right)$	$> > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{1}, f, f\right)$	$> < <$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	(f, f, f)	$> > >$	IIb	nichtwachsend

durch eine Klammer zusammengefaßt sind, ein beliebiges dieser Symbole genommen werden, z.B. kann in der fünften Spalte der Tabelle $n = 4$ beim

Tabelle für $n = 4$

Voraussetzungen über die Vorzeichen der Ableitungen von f				Definition des Operators T	Definition der Bedeutung von $w \gtrsim \tilde{w}$	fällt unter	Dann ist der Operator T monoton und zwar
Y_0	Y_1	Y_2	Y_3				
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_2^f, \binom{0}{1}_f, \binom{0}{f}, f\right)$	$> > > >$	IIa	nichtfallend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$(2, 1, 0, f)$	$> > > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\left(\binom{1}{2}_f, \binom{0}{1}, f, f\right)$	$> > < >$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{2}_f, \binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> < > <$	IId	nichtwachsend
$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$(2, f, f, f)$	$> < < <$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{1}_f, 1, 0, f\right)$	$> < < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{0}{f}, \binom{0}{1}, f, f\right)$	$> < > >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 0$	$\left(\binom{1}{f}, \binom{0}{f}, 0, f\right)$	$> > < >$	IId	nichtwachsend
$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	$\leqq 0$	(f, f, f, f)	$> > > >$	IIb	nichtwachsend

ersten Falle, in welchem alle $Y_j \geqq 0$ sind, $(2, 0, 0, f)$, $(2, f, 0, f)$ usw. gewählt werden.

5. Anfangswertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungen

Es werde die Anfangswertaufgabe zugrunde gelegt, vgl. [2], [10]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, w, p, q) \text{ in } D, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= g(s) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= h(s) \end{aligned}\right\} \text{ auf } \Gamma.$$

Es bedeutet $p = \frac{\partial w}{\partial x}$, $q = \frac{\partial w}{\partial y}$ und Γ sei eine etwa mittels des Parameters s durch $x = x(s)$, $y = y(s)$ für $s_0 \leqq s \leqq s_1$ mit $\frac{\partial x}{\partial s} > 0$, $\frac{\partial y}{\partial s} < 0$ gegebene Kurve. Dann ist auf Γ auch q bekannt; u sei der Vektor mit den Komponenten w, p, q. Es sei D der dreieckartige, von Γ und den beiden Geraden $x = x(s_1)$, $y = y(s_0)$ begrenzte Bereich und P ein Punkt im Innern von D. Man kann auch hier auf verschiedene Weise ein System der Form (2) aufstellen. Es mögen A und B die Schnittpunkte der durch P parallel zur y-Achse bzw. zur x-Achse gelegten Geraden mit der Kurve Γ bedeuten und B_x sei der durch diese Geraden und Γ begrenzte Bereich. Von verschiedenen Möglichkeiten, einen Operator T mit $u^* = Tu$ und eine Ordnungsbeziehung zu definieren, seien hier nur einige herausgegriffen. Wohl die bekannteste Art der Festlegung des Operators T ist die folgende:

$$w^*(x, y) = \iint_{B_x} f\big(\xi, \eta, w(\xi, \eta), p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)\big)\, d\xi\, d\eta, \tag{17}$$

$$p^*(x, y) = \int_A^P f(\xi, y, w, p, q)\, d\xi, \qquad q^*(x, y) = \int_B^P f(x, \eta, w, p, q)\, d\eta. \tag{18}$$

Dabei ist angenommen, daß man zuvor die Anfangsbedingungen homogen gemacht hat. Die Voraussetzungen III sind hier, wie man unmittelbar sieht, erfüllt. Für zwei Vektoren $u, \tilde{u}$ mit den Komponenten w, p, q bzw. $\tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{q}$ möge $u \geqq \tilde{u}$ bedeuten: $w \geqq \tilde{w}$, $p \geqq \tilde{p}$, $q \geqq \tilde{q}$; der Operator T ist monoton nicht fallend, wenn in D $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q} \geqq 0$ sind, und monoton nicht wachsend, wenn diese partiellen Ableitungen $\leqq 0$ sind. Man kann aber auch einen Operator T statt durch (17), (18) definieren durch

$$\left\{\begin{aligned} w^*(x, y) &= w(A) + \int_A^P p(\xi, y)\, d\xi, \qquad p^*(x, y) = p(A) + \int_A^P f\, d\xi, \\ q^*(x, y) &= q(A) + \int_B^P f\, d\eta, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

wobei man jetzt vorher nicht auf homogene Anfangsbedingungen zu transformieren braucht. Gilt nun z.B. $\frac{\partial f}{\partial w} \geqq 0$, $\frac{\partial f}{\partial p} \leqq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} \leqq 0$ in D, so kann man $u \geqq \tilde{u}$ definieren durch

$$w \geqq \tilde{w}, \qquad p \leqq \tilde{p}, \qquad q \leqq \tilde{q}$$

und T ist dann ein monoton nichtwachsender Operator.

BEISPIEL. Vorgelegt sei die Anfangswertaufgabe

$$w_{xy} = \tfrac{1}{2} + w + w_x w_y$$
$$w = w_x = w_y = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{mit} \quad s = x + y - 1.$$

Hier können w und seine Ableitungen als Funktionen von s aufgefaßt werden; dann lautet die Iterationsvorschrift:

$$T\begin{pmatrix} w \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^* \\ p^* \\ q^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w^* = \int_0^s p(\sigma)\, d\sigma, \qquad p^* = q^* = \int_0^s (\tfrac{1}{2} + w + p\, q)\, d\sigma;$$

für

$$u_0 = \begin{pmatrix} a\, s^2 \\ b\, s \\ b\, s \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad T u_0 = u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b\, s^2 \\ \frac{1}{2} s + \frac{a + b^2}{3} s^3 \\ \text{,,} \qquad\qquad \text{,,} \end{pmatrix}.$$

Der Kürze halber werde u_j, $\hat{u}_j$ an Stelle von $u_{(j)}$, $u_{\langle j \rangle}$ geschrieben. T ist hier ein monoton nichtfallender Operator. Macht man für $\hat{u}_0$ einen gleichen Ansatz, nur mit Konstanten $\hat{a}$, $\hat{b}$ an Stelle von a, b, so sind die Voraussetzungen $u_0 \leqq u_1 \leqq \hat{u}_1 \leqq \hat{u}_0$ z.B. für $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $\hat{a} = \frac{1}{2}$, $\hat{b} = 1$ erfüllt für $0 \leqq s \leqq 1$. Es existiert also eine Lösung der Anfangswertaufgabe im Streifen $0 \leqq s \leqq 1$ und diese Lösung u genügt der Einschließung $u_1 \leqq u \leqq \hat{u}_1$. Die Schranken sind noch recht grob, lassen sich aber natürlich durch Verwendung genauerer Ansätze (etwa mit Polynomen höheren Grades) leicht verbessern.

Literatur

[1] COLLATZ, L.: Aufgaben monotoner Art. Arch. d. Math. **3**, 366–376 (1952). — [2] COLLATZ, L.: Fixed-point theorems and monotonic operators for initial-value problems. Proc. Symposium on Numerical treatment of partial differential equations with real characteristics, Roma 1959, pp. 56–63. — [3] COLLATZ, L., u. J. SCHRÖDER: Einschließen der Lösungen von Randwertaufgaben. Numer. Math. **1**, 61–72 (1959). — [4] DUNFORD, N., and J. SCHWARTZ: Linear Operators, Vol. I. 858 S. New York 1958. — [5] KOLODNER, J. J.: Functional equations involving transformations of "bounded variation". Proc. Internat. Math. Congr. Amsterdam, 1954, Vol. II, pp. 127–128. — [6] KOLODNER, J. J.: On equations and inequalities involving operators of bounded variation (erscheint demnächst). — [7] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171–182 (1930). — [8] SCHRÖDER, J.: Anwendung funktionalanalytischer Methoden zur numerischen Behandlung von Gleichungen. Z. angew. Math. Mech. **36**, 260–261 (1956). — [9] SCHRÖDER, J.: Vom Defekt ausgehende Fehlerabschätzungen bei Differentialgleichungen. Arch. Rat. Mech. Analysis **3**, 219–228 (1959). — [10] SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzungen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Arch. Rat. Mech. Analysis **2**, 367–392 (1959). — [11] SCHRÖDER, J.: Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. Erscheint in Arch. Rat. Mech. Analysis.

Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik

(Eingegangen am 14. Januar 1960)

Heuser, H.
Math. Zeitschr. 74, 167—185 (1960)

Zur Eigenwerttheorie einer Klasse symmetrischer Operatoren

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Harro Heuser

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, der nicht vollständig zu sein braucht. Wir betrachten in dieser Arbeit Operatoren A auf $\mathfrak{H}$, d.h. lineare Transformationen, die $\mathfrak{H}$ in sich abbilden, mit der folgenden Eigenschaft:

(E) *Ist die (komplexe) Zahl $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von A, so bildet der Operator $A - \lambda I$ den Raum $\mathfrak{H}$ auf sich ab.*

Hierbei verstehen wir unter I wie üblich die identische Transformation. Die durch diese Eigenschaft (E) definierte Operatorklasse $\{A\}$ ist eine Verallgemeinerung der in [2], [6], [7] betrachteten Klassen. Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß A nicht als beschränkt vorausgesetzt wird. Die Vorteile einer solchen „algebraischen" Definition einer Operatorklasse für die Anwendungen sind in [6] hervorgehoben.

Im folgenden sei $\overline{\mathfrak{H}}$ ein vollständiger Hilbert-Raum, in dem $\mathfrak{H}$ dicht liegt [1]. Mit anderen Worten: Wir betten $\mathfrak{H}$ in seine Abschließung $\overline{\mathfrak{H}}$ ein. Das gibt uns die Möglichkeit, die Theorie der symmetrischen Operatoren A, die (E) genügen, auf die Betrachtung ihrer Erweiterungen in $\overline{\mathfrak{H}}$ zu stützen und uns so der Hilfsmittel der Spektraltheorie selbstadjungierter linearer Transformationen zu vergewissern. Einleitend bringen wir einen einfachen Hilfssatz, auf den wir uns in dieser Arbeit häufig zu berufen haben.

Hilfssatz 1. *Besitzt der symmetrische Operator A auf $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft* (E), *so existiert die Resolvente $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ für jedes λ mit $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ und ist auf ganz $\mathfrak{H}$ definiert und beschränkt.*

Beweis. Wegen der Symmetrie von A sind alle Eigenwerte von A reell. Ist $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, so existiert also $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ und ist wegen (E) genau auf $\mathfrak{H}$ definiert. Die Beschränktheit von R_λ folgt aus [5], Theorem 4.14.

Es erhebt sich nun zuerst die Frage, ob A selbstadjungiert oder wenigstens abgeschlossen ist [2]. Der folgende Satz zeigt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

Satz 1. *Besitzt der symmetrische Operator A auf $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft* (E) *und hat A in $\overline{\mathfrak{H}}$ eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung A', die ebenfalls* (E) *genügt, so ist A' auf ganz $\overline{\mathfrak{H}}$ definiert und A selbst beschränkt.*

[1] Eine solche Abschließung $\overline{\mathfrak{H}}$ existiert immer. Siehe etwa [8], S. 110.

[2] Zur Definition dieser Begriffe s. etwa [4], S. 310 bzw. 299.

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}' \supseteq \mathfrak{S}$ der Definitionsbereich von A', i die imaginäre Einheit. Nach Hilfssatz 1 existiert $R_i' = (A' - iI)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{S}'$ und ist beschränkt. Weil A' abgeschlossen ist, ist auch R_i' abgeschlossen. Aus der Beschränktheit und Abgeschlossenheit von R_i' folgt, daß der Definitionsbereich $\mathfrak{S}'$ von R_i' abgeschlossen ist. Da $\mathfrak{S}$, erst recht also $\mathfrak{S}'$ dicht in $\overline{\mathfrak{S}}$ liegt, ist also $\mathfrak{S}' = \overline{\mathfrak{S}}$. A' ist also auf ganz $\overline{\mathfrak{S}}$ definiert und daher nach dem Satz von HELLINGER-TOEPLITZ[3]) beschränkt. Erst recht ist also A selbst beschränkt.

Das folgende einfache Beispiel, das wir auch später noch benötigen werden, zeigt, daß ein symmetrischer Operator, der (E) genügt, durchaus unbeschränkt sein kann. $\overline{\mathfrak{S}}_0$ sei der spezielle (vollständige) Hilbert-Raum der komplexen Zahlenfolgen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ mit $\sum_1^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$, $\mathfrak{S}_0$ das Teilsystem aller abbrechenden Zahlenfolgen (also derjenigen Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder von Null verschieden sind). $\mathfrak{S}_0$ ist ein unvollständiger Hilbert-Raum, der dicht in $\overline{\mathfrak{S}}_0$ liegt. Man prüft leicht nach, daß die Diagonalmatrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

einen Operator A auf $\mathfrak{S}$ darstellt, der (E) genügt; die λ_n sind genau die Eigenwerte von A. Sind sie reell, so ist A offenbar auch symmetrisch. Wählt man z.B. $\lambda_n = n$, so ist A ersichtlich unbeschränkt.

Wir führen noch ein weiteres Beispiel eines symmetrischen Operators mit (E) an, das uns später von Nutzen sein wird.

Es sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller reellen Zahlen. Wir ordnen jedem $\alpha \in \mathfrak{C}$ eine komplexe Zahl ξ_α zu, und zwar so, daß höchstens abzählbar viele ξ_α von Null verschieden sind und die Quadratsumme $\sum |\xi_\alpha|^2$ konvergiert. Die Menge aller dieser Zuordnungen oder Belegungen $\{\xi_\alpha\}$ bildet — wenn man die linearen Verknüpfungen und das innere Produkt in üblicher Weise erklärt — einen vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ mit den Punkten $x = \{\xi_\alpha\}$. Die Elemente $e_\beta = \{\xi_\alpha | \xi_\beta = 1,\ \xi_\alpha = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta\}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{L}$ sei irgendeine beschränkte und abgeschlossene Menge reeller Zahlen λ. Jedem $\beta \in \mathfrak{C}$ ordnen wir ein $\lambda_\beta \in \mathfrak{L}$ zu, wobei wir die ganze Menge $\mathfrak{L}$ aufbrauchen wollen. Nun definieren wir einen Operator A auf $\mathfrak{H}$ durch die Vorschrift

$$A\,x = \sum_{\beta \in \mathfrak{C}} \lambda_\beta (x, e_\beta)\, e_\beta .$$

A ist symmetrisch, und die Eigenwerte von A sind genau die Zahlen λ_β, die zugehörigen Eigenlösungen die Elemente e_β. Man überzeugt sich leicht davon, daß für jede Zahl $\mu \notin \mathfrak{L}$ und jedes $h \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $(A - \mu I)\, x = h$ durch das Element

$$x = \sum \frac{1}{\mu} \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta - \mu} (h, e_\beta)\, e_\beta - \frac{1}{\mu} h$$

gelöst wird. A besitzt also die Eigenschaft (E).

[3]) Siehe [4], S. 295.

Wenn auch nach Satz 1 A im allgemeinen nicht selbstadjungiert sein wird, so zeigt doch der folgende Satz, daß A jedenfalls immer *wesentlich selbstadjungiert* ist; dabei heißt eine dicht auf $\overline{\mathfrak{S}}$ definierte lineare Transformation A wesentlich selbstadjungiert, wenn $A^* = A^{**}$ ist, d.h. wenn ihre adjungierte Transformation selbstadjungiert ist.

Satz 2. *Besitzt der auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ definierte symmetrische Operator A die Eigenschaft* (E), *so ist A wesentlich selbstadjungiert, und die selbstadjungierte lineare Transformation A^* ist die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gehören die Halbebenen $\operatorname{Im}\lambda > 0$ und $\operatorname{Im}\lambda < 0$ zur Resolventenmenge von A, so daß A ein reelles Spektrum besitzt. Nach [5], Theorem 4.17 ist daher A wesentlich selbstadjungiert, d.h. es ist

$$A^* = A^{**}. \tag{1}$$

Da A^* also selbstadjungiert, insbesondere also maximalsymmetrisch ist[4]), und da andererseits jede symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A auch eine symmetrische Erweiterung von A^{**} ist[5]), folgt aus (1), daß A^* die einzige symmetrische abgeschlossene Erweiterung von A ist.

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen dem Spektrum von A und dem Spektrum von A^*, um dann mittels der Spektralzerlegung von A^* Rückschlüsse auf das Spektrum von A zu ziehen. Dabei benutzen wir die folgenden Abkürzungen, wobei T eine beliebige lineare Transformation sei:

$Sp(T)$ = Spektrum von T,
$RSp(T)$ = Residualspektrum von T,
$PSp(T)$ = Punktspektrum von T (= Menge der Eigenwerte von T),
$KSp(T)$ = kontinuierliches Spektrum von T,
$Rm(T)$ = Resolventenmenge von T,
$\mathfrak{N}(T)$ = Kern von T, d.h. die Menge aller Elemente x mit $Tx = 0$.

Die hier aufgeführten spektraltheoretischen Begriffe sind z.B. in [5], S. 128f. definiert.

Satz 3. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ mit der Eigenschaft* (E). *Dann ist $Sp(A)$ reell, abgeschlossen und nicht leer und es gelten die folgenden Beziehungen:*

(a) $Sp(A) = Sp(A^*)$,
(b) $RSp(A) - \{0\} = RSp(A^*) = \emptyset$[6]),
(c) $PSp(A) - \{0\} = PSp(A^*) - \{0\}$,
(d) $KSp(A) = KSp(A^*)$.

---

[4]) Siehe [4], S. 304.
[5]) Siehe [4], S. 304 und 307.
[6]) Das Minuszeichen bedeutet die Bildung der Restmenge, $\emptyset$ die leere Menge.

Beweis. Da $A^* = A^{**}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A ist[7]), gilt nach [5], Theorem 4.9:

$$(2) \qquad \begin{aligned} Sp(A) &= Sp(A^*), \\ PSp(A) &\subseteq PSp(A^*), \\ KSp(A) &\supseteq KSp(A^*). \end{aligned}$$

Mit der ersten Zeile von (2) ist (a) bewiesen und gleichzeitig die Behauptung über $Sp(A)$ zu Anfang des Satzes 3, da wegen der Selbstadjungiertheit von A^* das Spektrum von A^* reell, abgeschlossen und nicht leer ist. Das Residualspektrum von A kann höchstens die Null enthalten, weil für $\lambda \neq 0$ der Operator $A - \lambda I$ wegen (E) entweder keine Inverse oder eine auf $\mathfrak{S}$, also dicht auf $\overline{\mathfrak{S}}$ definierte Inverse besitzt. Ferner ist $RSp(A^*)$ nach [5], Theorem 5.11 leer, da A^* selbstadjungiert ist. Damit ist auch (b) bewiesen. Da A^* nur reelle Eigenwerte haben kann, folgt wegen (b) aus [5], Theorem 4.15, daß jeder von Null verschiedene Eigenwert von A^* auch Eigenwert von A ist. Zusammen mit der zweiten Zeile von (2) folgt daraus die Behauptung (c). Da Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum einer linearen Transformation punktfremd sind, wegen (b)

$$Sp(A) - \{0\} = \big(PSp(A) - \{0\}\big) \cup \big(KSp(A) - \{0\}\big)$$

ist und diese Formel wegen $RSp(A^*) = \emptyset$ auch gilt, wenn man in ihr überall A durch A^* ersetzt, folgt aus (a) und (c), daß

$$(3) \qquad KSp(A) - \{0\} = KSp(A^*) - \{0\}$$

ist. Ist nun $0 \in KSp(A^*)$, so ist nach der letzten Zeile von (2) auch $0 \in KSp(A)$. Ist umgekehrt $0 \in KSp(A)$, so liegt nach (a) 0 jedenfalls in $Sp(A^*)$, und wegen $RSp(A^*) = \emptyset$ folgt daraus nach [5], Theorem 4.15, daß $0 \in KSp(A^*)$ ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich mit (3) die Behauptung (d) unseres Satzes.

Da A^* eine Erweiterung von A ist, wird für einen Eigenwert λ von A im allgemeinen $\mathfrak{N}(A - \lambda I) \subseteq \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ sein. Von besonderem Interesse ist der Fall, wo diese Ungleichung in Wirklichkeit eine Gleichheit ist. Der folgende Satz macht darüber eine genaue Aussage.

Satz 4. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ und besitze die Eigenschaft* (E). *Genau dann gilt für einen von Null verschiedenen Eigenwert λ von A die Gleichung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$, wenn $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ ein (vollständiger) Hilbert-Raum ist und gleichzeitig das Bild $(A - \lambda I)\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}$ unter $A - \lambda I$ dicht in dem orthogonalen Komplement zu $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ in $\mathfrak{S}$ liegt.*

Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Zuerst nehmen wir an, daß die Beziehung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ gilt. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist; denn offenbar ist $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ wegen der Abgeschlossenheit von A^* ein solcher. Nach [8], S. 116, Theorem 3 gibt es daher

[7]) Siehe [4], S. 304.

zu $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ ein orthogonales Komplement $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$, so daß $\mathfrak{H}=\mathfrak{R}(A-\lambda I)+\mathfrak{C}$ ist. Da A symmetrisch, $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ invariant unter A und $\mathfrak{C}$ orthogonal zu $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ ist, ist $\mathfrak{C}$ invariant unter A. Es sei A' die Einschränkung von A auf $\mathfrak{C}$. Wir denken uns $\mathfrak{C}$ in seine Abschließung $\overline{\mathfrak{C}} \subseteq \overline{\mathfrak{H}}$ eingebettet und bilden zu A' die adjungierte Transformation $(A')^*$, die wegen der Symmetrie von A' eine Erweiterung von A' ist. λ ist kein Eigenwert von A', weil eine Eigenlösung e von A' zu λ einerseits in $\mathfrak{C}$, andererseits aber auch in $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ liegen müßte, da sie auch Eigenlösung von A zu λ wäre. λ kann auch nicht im Residualspektrum von A' liegen, weil sonst nach [5], Theorem 4.15 λ ein Eigenwert von $(A')^*$ wäre (beachte hierbei die Realität von λ!), jede zugehörige Eigenlösung aber einerseits in $\overline{\mathfrak{C}}$, andererseits in $\mathfrak{R}(A^*-\lambda I)$ liegen müßte, da A^* eine Erweiterung von $(A')^*$ ist; dies ist jedoch unmöglich, da $\overline{\mathfrak{C}}$ orthogonal zu $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$, auf Grund unserer Voraussetzung also auch orthogonal zu $\mathfrak{R}(A^*-\lambda I)$ ist. λ kann also nur dem kontinuierlichen Spektrum oder der Resolventenmenge von A' angehören. In beiden Fällen liegt $(A'-\lambda I)\mathfrak{C}$ dicht in $\overline{\mathfrak{C}}$, erst recht also liegt dann $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in $\mathfrak{C}$.

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ ein vollständiger Hilbert-Raum ist und $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in dem orthogonalen Komplement $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ in $\mathfrak{H}$ liegt. Es sei s^* ein Element des Definitionsbereiches $\mathfrak{S}^*$ von A^*. Da A nach Satz 2 wesentlich selbstadjungiert ist, gibt es nach [5], Theorem 4.17 und Theorem 2.10 zu s^* eine Folge $s_n \in \mathfrak{S}$ derart, daß

$$s_n \to s^*, \qquad A s_n \to t \quad \text{und} \quad t = A^* s^*$$

ist. Somit konvergiert auch

$$(A-\lambda I)\, s_n \to (A^*-\lambda I)\, s^*.$$

s_n können wir in der Form

$$s_n = k_n + c_n \quad \text{mit} \quad k_n \in \mathfrak{R}(A-\lambda I), \qquad c_n \in \mathfrak{C}$$

darstellen, und da $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ orthogonal ist, gilt

$$||s_n - s_m||^2 = ||k_n - k_m||^2 + ||c_n - c_m||^2.$$

Daraus folgt wegen der Konvergenz der s_n, daß

$$k_n \to k, \qquad c_n \to c$$

konvergiert, wobei k in $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ liegt, da dieses System vollständig ist, während $c \in \overline{\mathfrak{C}}$ ist. Da nach Voraussetzung $(A-\lambda I)\mathfrak{S}$ dicht in $\mathfrak{C}$, also auch dicht in $\overline{\mathfrak{C}}$ liegt, gibt es eine Folge $x_n \in \mathfrak{S}$, so daß $c = \lim (A-\lambda I)\, x_n$ ist. Damit haben wir gefunden, daß ein beliebiges $s^* \in \mathfrak{S}^*$ sich in der Form

$$s^* = k + \lim (A-\lambda I)\, x_n \quad \text{mit} \quad k \in \mathfrak{R}(A-\lambda I), \qquad x_n \in \mathfrak{S}$$

darstellen läßt. Ist $s^* = k^* \in \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$, so erhalten wir also

$$k^* - k = \lim (A - \lambda I)\, x_n = \lim (A^* - \lambda I)\, x_n. \tag{4}$$

Da nun $\mathfrak{N}(A - \lambda I) \subseteq \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ ist, liegt $k^* - k$ in $\mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$; dieser Raum ist aber orthogonal zu dem Bildbereich von $A^* - \lambda I$, also auch orthogonal zu dessen Abschließung, da A^* selbstadjungiert und λ reell ist. Daraus folgt mit (4), daß $k^* - k = 0$ ist. Also ist $k^* \in \mathfrak{N}(A - \lambda I)$. Zusammen mit der eben erwähnten Ungleichung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) \subseteq \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ ergibt sich daraus die behauptete Gleichung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$.

Im Anschluß an die genauen Bedingungen des Satzes 4 wollen wir nun eine hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ angeben. Wir benötigen dazu den Begriff der *schwachen Abgeschlossenheit* eines Operators, den wir zuerst definieren wollen.

Ein Operator T auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ heißt schwach abgeschlossen, wenn aus

$$s_n \to \bar{s} \qquad (s_n \in \mathfrak{S},\ \bar{s} \in \overline{\mathfrak{S}})$$

und

$$T s_n \to t \in \mathfrak{S}$$

folgt, daß $\bar{s} \in \mathfrak{S}$ und $T\bar{s} = t$ ist.

Satz 5. *A sei ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ und erfülle* (E). *Dann ist $A - \lambda I$ für jede Zahl $\lambda \neq 0$, die kein Eigenwert von A ist, schwach abgeschlossen. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A und $A - \lambda I$ schwach abgeschlossen, so ist $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}^* \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$ der Definitionsbereich der nach Satz 2 selbstadjungierten linearen Transformation A^* und $\lambda \neq 0$. $\{s_n\}$ sei eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{S}$, die gegen $\bar{s} \in \overline{\mathfrak{S}}$ konvergiert und gleichzeitig konvergiere

$$(A - \lambda I)\, s_n = (A^* - \lambda I)\, s_n \to t \in \mathfrak{S}.$$

Aus der Abgeschlossenheit von A^* folgt, daß

$$\bar{s} \in \mathfrak{S}^* \quad \text{und} \quad (A^* - \lambda I)\, \bar{s} = t \tag{5}$$

ist. λ sei kein Eigenwert von A. Dann gibt es wegen (E) ein $s \in \mathfrak{S}$ mit

$$(A - \lambda I)\, s = t. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt $(A^* - \lambda I)(\bar{s} - s) = 0$. Da nach Satz 3 λ auch kein Eigenwert von A^* ist, folgt aus dieser Gleichung $\bar{s} - s = 0$, also $\bar{s} \in \mathfrak{S}$. Zusammen mit der zweiten Beziehung in (5) ergibt sich daraus die erste Behauptung unseres Satzes.

Es sei nun $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A und $A - \lambda I$ sei schwach abgeschlossen. k^* sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$. Da $k^* \in \mathfrak{S}^*$ ist, gibt es wegen der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A nach [5], Theorem

4.17 und Theorem 2.10 eine Folge $s_n \in \mathfrak{S}$, so daß

$$s_n \to k^* \quad \text{und} \quad A s_n \to A^* k^* = \lambda k^*$$

konvergiert. Also konvergiert $(A - \lambda I) s_n \to 0$, wegen der schwachen Abgeschlossenheit von $A - \lambda I$ ist also $k^* \in \mathfrak{S}$ und $(A - \lambda I) k^* = 0$, d.h. k^* liegt in $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, wenn man noch die schon mehrfach erwähnte Ungleichung $\mathfrak{N}(A - \lambda I) \subseteqq \mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ beachtet.

Wir werden nun einen Hilfssatz formulieren und beweisen, der uns in die Lage setzen wird, Aussagen über die Struktur des Spektrums von A, über die Existenz von Eigenwerten und über die Entwicklung gewisser Elemente aus $\mathfrak{S}$ nach Eigenlösungen zu machen.

Hilfssatz 2. *Es sei A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteqq \overline{\mathfrak{S}}$, der die Eigenschaft* (E) *besitzt. E_λ sei die Spektralschar des selbstadjungierten Operators A^*. Dann ist für jede reelle Zahl ξ und für jedes Element $s \in \mathfrak{S}$, das in der Form $(A - \xi I)^2 x = s$ dargestellt werden kann, die Funktion $(E_\lambda s, s)$ in ξ differenzierbar, und ihre Ableitung ist dort gleich Null.*

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

(a) Zunächst bemerken wir, daß nach Satz 2 die Transformation A^* selbstadjungiert ist und daher eine Spektralschar E_λ besitzt. Ist ζ eine beliebige komplexe Zahl mit $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$, so gilt

$$(A^* - \zeta I)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \zeta} \, dE_\lambda \text{ [8]}).$$

Ist $s \in \mathfrak{S}$, so existiert wegen (E) $R_\zeta s = (A - \zeta I)^{-1} s = (A^* - \zeta I)^{-1} s$, und es ist

$$(R_\zeta s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \zeta} \, d(E_\lambda s, s), \tag{7}$$

somit, wenn wir $\zeta = \alpha + i\beta$ setzen und beachten, daß $(E_\lambda s, s)$ reell ist,

$$v(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}(R_\zeta s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2} \, d(E_\lambda s, s). \tag{8}$$

Wir erinnern noch daran, daß $(E_\lambda s, s)$ eine nicht-abnehmende Funktion von λ ist. Die hier benutzten Tatsachen über Spektralscharen und Spektralzerlegung findet man in [4] und [5].

(b) Wir zeigen nun: Ist $s \neq 0$, so ist $v(\alpha, \beta)$ für $\beta > 0$ eine positive Potentialfunktion. Nach [5], Theorem 4.12 ist nämlich $\big((A^* - \zeta I)^{-1} s, s\big) = (R_\zeta s, s)$ eine in der oberen und unteren Halbebene reguläre Funktion, da A^* selbstadjungiert ist. $v(\alpha, \beta)$ ist also in diesen beiden Halbebenen eine Potential-

[8]) Siehe [4], S. 346.

funktion. Mit $R_\zeta s = t$ erhält man

$$(R_\zeta s, s) = \big(t, (A - \alpha I - i\beta I)\, t\big) = \big(t, (A - \alpha I)\, t\big) + i\beta (t, t).$$

Da $\big(t, (A - \alpha I) t\big)$ wegen der Realität von α und der Symmetrie von A reell ist, ist also $v(\alpha, \beta) = \beta (t, t)$. Da schließlich für $s \neq 0$ auch $t \neq 0$ ist, folgt aus dieser Gleichung, daß für $\beta > 0$ in der Tat $v(\alpha, \beta) > 0$ ist. Die Behauptung (b) hätte man mit Hilfe einfacher Sätze aus der Theorie des Poisson-Stieltjesschen Integrals und einfacher Grenzwertbeziehungen für Spektralscharen auch aus der Darstellung (8) herleiten können.

(c) Wir beweisen nun die folgende Aussage: Ist $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$, so gilt die Beziehung

$$(9) \qquad (R_\zeta s, s) = \big((A - \xi I)\, x, s\big) + (\zeta - \xi)\, (x, s) + (\zeta - \xi)^2\, (R_\zeta x, s),$$

wenn $x, s \in \mathfrak{S}$ durch die Gleichung

$$(10) \qquad (A - \xi I)^2\, x = s$$

miteinander verbunden sind.

Denn offenbar gilt für zwei beliebige Zahlen ζ_1, ζ_2 die Identität

$$(A - \zeta_1 I)^2 = (A - \zeta_2 I)\, (A - \zeta_1 I) + (\zeta_2 - \zeta_1)\, (A - \zeta_2 I) + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 I.$$

Diese Identität wenden wir für $\zeta_1 = \xi$, $\zeta_2 = \zeta$ mit $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ auf das durch (10) bestimmte Element x an und erhalten so die Gleichung

$$(11) \qquad s = (A - \zeta I)\, (A - \xi I)\, x + (\zeta - \xi)\, (A - \zeta I)\, x + (\zeta - \xi)^2\, x.$$

Wegen $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ können wir nach Hilfssatz 1 die Resolvente R_ζ auf (11) anwenden und erhalten, indem wir noch mit s skalar multiplizieren, die behauptete Identität (9).

(d) Wir zeigen nun folgendes: Ist ξ eine reelle Zahl und $s \in \mathfrak{S}$ in der Form (10) gegeben, ist ferner $\zeta = \alpha + i\beta$ und $\beta > 0$, so strebt $v(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} (R_\zeta s, s)$ gegen 0 für $\zeta \to \xi$ im Winkelraum $\mathfrak{W}$: $|\alpha - \xi| \leqq \beta$ [9]).

Wegen $\operatorname{Im} \zeta = \beta > 0$ gilt nach [5], Theorem 4.14 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den in (9) auftretenden Ausdruck $(R_\zeta x, s)$ die Abschätzung

$$|(R_\zeta x, s)| \leqq \frac{\|x\| \cdot \|s\|}{\beta}.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$|(\zeta - \xi)\, (x, s) + (\zeta - \xi)^2\, (R_\zeta x, s)| \leqq 6 \|x\| \cdot \|s\| \cdot \beta \quad \text{für} \quad \zeta \in \mathfrak{W}.$$

[9]) Diese Bemerkung wurde von WIELANDT [7] bewiesen und benutzt, um die Existenz von Eigenwerten finiter symmetrischer Operatoren zu zeigen.

Mit der Gl. (9) folgt daraus die Grenzwertbeziehung

$$(12) \qquad (R_\zeta s, s) \to \big((A - \xi I)\, x, s\big) \quad \text{für} \quad \zeta \to \xi \quad \text{in } \mathfrak{W}.$$

Da wegen der Realität von ξ der Operator $A - \xi I$ symmetrisch ist, ergibt sich aus (10) die Gleichung

$$\big((A - \xi I)\, x, s\big) = \big((A - \xi I)\, x, (A - \xi I)^2 x\big) = \big((A - \xi I)^3 x, x\big).$$

Das letzte Glied dieser Gleichungskette ist wegen der Symmetrie von $(A - \xi I)^3$ reell, also ist auch $\big((A - \xi I)\, x, s\big)$ reell. Daher folgt aus (12), daß in der Tat $v(\alpha, \beta) \to 0$ für $\zeta \to \xi$ in $\mathfrak{W}$.

(e) Für den letzten Schritt unseres Beweises benutzen wir einen Satz aus [3] über Potentialfunktionen, die in der oberen Halbebene positiv und durch die Darstellung (8) gegeben sind: Strebt $v(\alpha, \beta) \to \varkappa$ wenn $(\alpha, \beta) \to (\xi, 0)$ auf zwei verschiedenen Strahlen, die in der oberen Halbebene verlaufen und in $(\xi, 0)$ einmünden, so existiert die Ableitung der Integratorfunktion $(E_\lambda s, s)$ in ξ und ist gleich $\varkappa/\pi$. Nach (d) erfüllt $v(\alpha, \beta) = \mathrm{Im}\,(R_\zeta s, s)$ die Konvergenzbedingung dieses Satzes, wenn s von Null verschieden und in der Form (10) gegeben ist, und zwar ist $\varkappa = 0$. Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes 2 im Falle $s \neq 0$ bewiesen. Für $s = 0$ ist sie jedoch wegen $(E_\lambda s, s) \equiv 0$ trivial.

Satz 6. *Es sei A ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$, der die Eigenschaft* (E) *besitzt. Dann besteht $KSp(A) - \{0\}$ genau aus den von Null verschiedenen Häufungspunkten von Eigenwerten von A, die selbst keine Eigenwerte sind.*

Beweis. Weil nach Satz 3 das Spektrum von A abgeschlossen und $RSp(A) - \{0\} = \emptyset$ ist, gehört jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten von A, der selbst kein Eigenwert ist, zu $KSp(A) - \{0\}$. Für den Nachweis, daß umgekehrt jeder Punkt aus $KSp(A) - \{0\}$ Häufungspunkt von Eigenwerten ist, genügt es, da nach Satz 3 das Spektrum von A reell ist, folgendes zu zeigen: jedes offene Intervall (λ_1, λ_2) der reellen Achse, das weder 0 noch einen Eigenwert von A enthält, gehört zur Resolventenmenge von A. Dies ergibt sich jedoch sehr leicht aus Hilfssatz 2. Denn wegen (E) läßt sich für beliebiges $\xi \in (\lambda_1, \lambda_2)$ jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ in der Form (10) darstellen, also besitzt die Funktion $(E_\lambda s, s)$ für jedes $s \in \mathfrak{S}$ in (λ_1, λ_2) eine verschwindende Ableitung. Für zwei beliebige Zahlen α_1, α_2 aus (λ_1, λ_2) und für jedes $s \in \mathfrak{S}$ ist also $(E_{\alpha_1} s, s) = (E_{\alpha_2} s, s)$. Daraus folgt, daß die Projektionsoperatoren E_{α_1} und E_{α_2} übereinstimmen. Also ist E_λ auf dem Intervall (λ_1, λ_2) konstant, und daraus folgt nach der bekannten Charakterisierung des Spektrums durch die Spektralschar [10]), daß (λ_1, λ_2) zur Resolventenmenge von A^*, nach Satz 3 daher auch zur Resolventenmenge von A gehört.

Satz 7. *Ein von Null verschiedener symmetrischer Operator A mit der Eigenschaft* (E) *besitzt mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert.*

---

[10]) Siehe [5], Definition 5.2 und Theorem 5.11.

Andernfalls würden nämlich nach Satz 6 die Intervalle $0<\lambda<+\infty$ und $-\infty<\lambda<0$ zu $Rm(A)$, nach Satz 3 also auch zu $Rm(A^*)$ gehören, wären also Konstanzintervalle der Spektralschar E_λ von A^*. Weil nach [5], Theorem 5.6 für die Spektralschar einer selbstadjungierten linearen Transformation die Limesbeziehungen

$$E_\lambda \to I \quad \text{für} \quad \lambda \to +\infty, \qquad E_\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda \to -\infty$$

gelten, wäre in unserem Falle also $E_\lambda = I$ für positive λ und $E_\lambda = 0$ für negative λ. Aus der Spektraldarstellung

$$A^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$$

folgt dann $A^* = 0$, also auch $A = 0$, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung.

Obwohl Satz 7 die Existenz von Eigenwerten von A verbürgt, werden die zugehörigen Eigenlösungen im allgemeinen nicht ausreichen, um jedes Element der Form $A\,s$ in eine Fourier-Reihe nach Eigenlösungen zu entwickeln. Betrachten wir das folgende Beispiel! Es sei $\mathfrak{G}$ ein vollständigerHilbert-Raum und G ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{G}$, der keine Eigenwerte besitzt. $\mathfrak{H}$ sei der vollständige Hilbert-Raum, den wir im zweiten Beispiel im Anfang dieser Arbeit einführten, und H sei der in diesem Beispiel A genannte Operator, wobei die dort figurierende Menge $\mathfrak{L}$ gleich $Sp(G)$ gewählt werde[11]). Der Raum $\mathfrak{S}$ wird nun definiert als der Produktraum $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, d.h. als die Menge der Paare $\{g, h\}$. Mit der natürlichen Definition der linearen Verknüpfungen und mit

$$[\{g_1, h_1\}, \{g_2, h_2\}] = (g_1, g_2) + (h_1, h_2)$$

als innerem Produkt ist $\mathfrak{S}$ ein vollständiger Hilbert-Raum. Definieren wir den Operator A durch die Vorschrift

$$A\{g, h\} = \{G\,g, H\,h\},$$

so ist A offenbar ein symmetrischer Operator auf $\mathfrak{S}$, der die Eigenschaft (E) besitzt. Die Eigenwerte von A sind genau die Eigenwerte von H, die Eigenlösungen sind genau die Paare $\{0, e\}$, wobei e die Eigenlösungen von H durchläuft. Da jede Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \{0, e_n\}$ in dem Teilraum der Paare $\{0, h\}$ liegt, kann kein Element der Form $A\{g, 0\} \neq 0$ in eine Reihe nach Eigenlösungen von A entwickelt werden.

Andererseits kann es vorkommen, daß bei gegebenem symmetrischen Operator A mit (E) zwar eine Entwicklung nach Eigenlösungen von A^*, nicht jedoch nach Eigenlösungen von A allein möglich ist. Um uns bei der

[11]) $Sp(G)$ ist eo ipso abgeschlossen und, da G nach dem schon früher zitierten Satz von HELLINGER-TOEPLITZ beschränkt ist, auch beschränkt. Damit erfüllt $Sp(G)$ die Anforderungen, die an die Menge $\mathfrak{L}$ gestellt wurden.

Formulierung eines derartigen Entwicklungssatzes unabhängig von der adjungierten Transformation A^* zu machen, geben wir zunächst die folgende Definition:

A sei ein symmetrischer Operator mit der Eigenschaft (E) *auf* $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$, $\lambda \neq 0$ *sei ein Eigenwert von* A. *Dann heißt ein Element* e *aus* $\overline{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S}$ *generalisierte Eigenlösung von* A *zum Eigenwert* λ, *wenn es eine Folge von Elementen* s_n *aus* $\mathfrak{S}$ *so gibt, daß*

$$s_n \to e \quad \text{und} \quad (A - \lambda I)\, s_n \to 0$$

strebt für $n \to \infty$.

Offenbar sind die generalisierten Eigenlösungen von A genau die Eigenlösungen von A^* zu Eigenwerten $\neq 0$, die keine Eigenlösungen von A sind. Konstruiert man zu jedem Eigenwert $\lambda \neq 0$ von A eine Orthonormalbasis des (vollständigen) Raumes $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ und faßt man diese Basen zusammen, so erhält man, da A^* selbstadjungiert ist, ein Orthonormalsystem aus Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A, das wir *generalisiertes Eigensystem* von A nennen und mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wollen.

Wir wollen nun zwei Sätze aussprechen und beweisen, die zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen eine Entwicklung von As nach dem System $\mathfrak{E}$ möglich ist.

Satz 8. *A sei ein symmetrischer Operator auf* $\mathfrak{S}$, *der* (E) *genügt und höchstens abzählbar viele Eigenwerte besitzt*[12]. *Dann kann jedes Element des Bildbereiches von A nach orthonormalen Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A zu Eigenwerten $\neq 0$ entwickelt werden, d.h. für jedes $s \in \mathfrak{S}$ gilt*

$$(13) \qquad A s = \sum_{e \in \mathfrak{E}} (A s, e)\, e = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, e;$$

hierbei ist $\mathfrak{E}$ das oben definierte Orthonormalsystem.

Beweis. Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ ist

$$(14) \qquad (A s, s) = (A^* s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E_\lambda s, s),$$

wobei E_λ wie früher die Spektralschar der selbstadjungierten linearen Transformation A^* bedeutet. Die höchstens abzählbar vielen Eigenwerte von A zusammen mit 0 bilden eine bezüglich $(E_\lambda s, s)$ meßbare Menge; das Komplement dieser Menge in $-\infty < \lambda < \infty$ ist also ebenfalls bezüglich $(E_\lambda s, s)$ meßbar, und zwar ist sein Maß Null, weil in jedem seiner Punkte die Ableitung von $(E_\lambda s, s)$ verschwindet, wie aus Hilfssatz 2 zusammen mit (E) sofort folgt. Das Integral in (14) reduziert sich also auf die Summe $\sum \lambda \sigma_\lambda$, wobei $\sigma_\lambda = \big((E_\lambda - E_{\lambda-0})\, s, s\big)$ ist und λ die von Null verschiedenen Eigenwerte von A durchläuft. Da $(E_\lambda - E_{\lambda-0})\, s$ die orthogonale Projektion von s auf $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$, also $\sigma_\lambda = \sum (s, e)\, (e, s)$ ist, wobei e in $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{R}(A^* - \lambda I)$ liegt, finden wir schließlich

$$(15) \qquad (A s, s) = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, (e, s) = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda |(s, e)|^2$$

[12]) Dieser Fall ist immer gegeben, wenn $\mathfrak{S}$ separabel ist.

für jedes $s \in \mathfrak{S}$. Also ist

$$A s = \sum \lambda (s, e)\, e = \sum (s, \lambda e)\, e = \sum (s, A^* e)\, e = \sum (A s, e)\, e,$$

womit die Entwicklung (13) bewiesen ist. Die Gl. (15) ist das *Hauptachsentheorem* für den Operator A.

Der Fall, daß man in einer Entwicklung der Form (13) keine generalisierten Eigenlösungen benötigt, ist insbesondere bei den *finiten Operatoren* [13]) gegeben. Dabei nennen wir einen Operator A auf $\mathfrak{S}$ *finit*, wenn für jede komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ die Dimension von $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ endlich ist und mit der Dimension des Quotientensystems $\mathfrak{S}/(A - \lambda I)\,\mathfrak{S}$ übereinstimmt. Ist A symmetrisch und finit, so kann man offenbar $\mathfrak{S}$ in der Form

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{N}(A - \lambda I) + (A - \lambda I)\,\mathfrak{S} \tag{16}$$

in orthogonale Komplemente zerlegen, wobei der Kern $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ wegen seiner endlichen Dimension ein (vollständiger) Hilbert-Raum ist, und die symmetrischen finiten Operatoren lassen sich durch eine solche Zerlegbarkeit charakterisieren. Es folgt aus diesen Bemerkungen, daß A die Eigenschaft (E) besitzt und den Bedingungen des Satzes 4 genügt, so daß für alle Eigenwerte $\neq 0$ von A die Kerne $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ und $\mathfrak{N}(A^* - \lambda I)$ übereinstimmen. Das Eigensystem $\mathfrak{E}$ von A enthält also nur Eigenlösungen von A. Der folgende Satz zeigt, daß für symmetrische finite Operatoren die Elemente $A s$ nach dem Eigensystem $\mathfrak{E}$ entwickelt werden können.

Satz 9 [14]). *Es sei A ein symmetrischer finiter Operator auf $\mathfrak{S}$. Dann besteht für jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ die Entwicklung*

$$A s = \sum_{e \in \mathfrak{E}} (A s, e)\, e = \sum_{e \in \mathfrak{E}} \lambda (s, e)\, e \tag{17}$$

nach orthonormalen Eigenlösungen von A.

Beweis. Für jedes Element s aus $\mathfrak{S}$ gilt die Darstellung (14). $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ seien die (höchstens abzählbar vielen) Eigenwerte von A, in denen die Funktion $(E_\lambda s, s)$ einen Sprung macht: $\left((E_{\lambda_n} - E_{\lambda_n - 0})\, s, s\right) \neq 0$. An allen anderen Stellen ist $(E_\lambda s, s)$ stetig. Ist $\lambda_0 \neq 0$ ein Eigenwert, der mit keinem der obigen Eigenwerte λ_n übereinstimmt, so ist daher $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})\, s = 0$, und da $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})\, s$ die orthogonale Projektion von s auf den Eigenraum $\mathfrak{N}(A^* - \lambda_0 I)$ darstellt, bedeutet dies, daß s orthogonal zu $\mathfrak{N}(A^* - \lambda_0 I)$, also auch orthogonal zu $\mathfrak{N}(A - \lambda_0 I)$ ist. Die Zerlegung (16) lehrt dann, daß $s = (A - \lambda_0 I)\, w$ mit einem

[13]) Symmetrische finite Operatoren wurden in [7] eingeführt und im Anschluß daran in [2] weiter untersucht.

[14]) Dieser Satz wurde — ebenso wie ein Existenzsatz für Eigenwerte symmetrischer finiter Operatoren — zuerst in [7] bewiesen. Unser Beweis zeigt darüber hinaus, daß die Endlichkeitsvoraussetzung für die Dimension von $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ für den Entwicklungssatz unerheblich ist, wenn man nur die Zerlegung (16) beibehält. Allerdings können dann in der Entwicklung (17) auch generalisierte Eigenlösungen von A auftreten, und zwar wegen Satz 4 nur dann, wenn $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$ unvollständig ist.

$w \in \mathfrak{S}$ ist, und darüber hinaus, da man w gemäß derselben Zerlegung in der Form $w = k + (A - \lambda_0 I)\, x$ $\left(k \in \mathfrak{N}(A - \lambda_0 I),\ x \in \mathfrak{S}\right)$ darstellen kann, daß sogar $s = (A - \lambda_0 I)^2 x$ gilt. Nach Hilfssatz 2 besitzt daher $(E_\lambda s, s)$ in λ_0 eine verschwindende Ableitung. Ist $\xi \neq 0$ eine reelle Zahl, die mit keinem der Eigenwerte von A übereinstimmt, so ist wiederum nach (16) $s = (A - \xi I)^2 x$, und somit besitzt $(E_\lambda s, s)$ auch in ξ eine verschwindende Ableitung. Daraus folgt wie beim Beweis des Satzes 8, daß die Integraldarstellung (14) sich auf die Reihe

$$(A\, s, s) = \sum_{e_n \in \mathfrak{E}} \lambda_n (s, e_n)\, (e_n, s) = \sum_{e_n \in \mathfrak{E}} \lambda_n |(s, e_n)|^2$$

reduziert, die das *Hauptachsentheorem für symmetrische finite Operatoren* ausdrückt. Daraus folgt dann sofort die im Satz 9 behauptete Darstellung. Die Elemente e_n sind allesamt Eigenlösungen von A, wie wir schon oben bemerkten.

Wir wollen nun die beiden Klassen von Operatoren, die wir in den Sätzen 8 und 9 betrachtet haben, mit Hilfe ihrer Entwicklungssätze charakterisieren.

Satz 10. *Der Operator A sei auf $\mathfrak{S} \subseteqq \overline{\mathfrak{S}}$ definiert, sei symmetrisch und besitze höchstens abzählbar viele Eigenwerte. Dann sind die folgenden Bedingungen zusammen notwendig und hinreichend dafür, daß A die Eigenschaft* (E) *besitzt:*

(a) *Für jede komplexe Zahl $\zeta \neq 0$, die kein Eigenwert von A ist, ist $A - \zeta I$ schwach abgeschlossen.*

(b) *Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ gilt die Entwicklung* (13) *mit einem orthonormalen System $\mathfrak{E}$ von Eigenlösungen und generalisierten Eigenlösungen von A* [15]).

(c) *Für jede reelle Zahl $\mu \neq 0$, die Häufungspunkt von Eigenwerten von A ist ohne selbst Eigenwert zu sein, konvergiert die Reihe $\sum \left(\frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(s, e_n)|^2$ bei beliebigem $s \in \mathfrak{S}$; e_n durchläuft dabei $\mathfrak{E}$, λ_n die zugehörigen Eigenwerte.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) ist durch die Sätze 5 und 8 bereits dargetan. Ist $\mu \neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten und selbst kein Eigenwert, so ist nach Satz 3 μ auch kein Eigenwert der selbstadjungierten linearen Transformation A^*, also existiert $(A^* - \mu I)^{-1}$ und ist wegen (E) jedenfalls auf $\mathfrak{S}$ definiert. Nach [4], S. 342 und 346 konvergiert also das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \mu}\right)^2 d(E_\lambda s, s)$ für jedes $s \in \mathfrak{S}$. Wegen Satz 8 reduziert sich dieses Integral gerade auf die in (c) auftretende Reihe. Damit ist auch die Notwendigkeit von (c) bewiesen.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingungen (a), (b), (c) auch hinreichend sind. Den Beweis hierfür zerlegen wir in mehrere Schritte.

(α) Wir zeigen zuerst, daß A wesentlich selbstadjungiert ist. Nach [5], Theorem 4.16 und 4.17 genügt es nachzuweisen, daß die zu A adjungierte

[15]) Wir hatten generalisierte Eigenlösungen zunächst nur für symmetrische Operatoren mit (E) eingeführt. Aber sie lassen sich natürlich für beliebige symmetrische Operatoren einführen, und man sieht dann sofort, daß eine generalisierte Eigenlösung von A zu λ eine Eigenlösung von A^* zu λ ist.

Transformation A^* keine Eigenwerte ζ mit $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ besitzt. Es sei t ein Element aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{S}^* \supseteq \mathfrak{S}$ von A^* und $s \in \mathfrak{S}$. Dann ist wegen (b)

$$(s, A^* t) = (A s, t) = \sum \lambda (s, e)\,(e, t),$$

also

$$(A^* t, s) = \overline{(s, A^* t)} = \sum \lambda (t, e)\,(e, s) = \left(\sum \lambda (t, e)\, e, s\right)$$

für jedes $s \in \mathfrak{S}$, und da $\mathfrak{S}$ dicht in $\overline{\mathfrak{S}}$ liegt, folgt daraus

$$A^* t = \sum \lambda (t, e)\, e. \tag{18}$$

Es sei nun $\zeta \neq 0$ ein Eigenwert von A^*, e^* eine zugehörige Eigenlösung. Dann folgt aus (18)

$$\zeta e^* = A^* e^* = \sum \lambda (e^*, e)\, e,$$

$$\zeta (e^*, e^*) = \sum \lambda |(e^*, e)|^2,$$

woraus sich wegen $(e^*, e^*) \neq 0$ und der Realität der Eigenwerte unmittelbar die Realität von ζ ergibt. Also ist A in der Tat wesentlich selbstadjungiert.

(β) Ist $s_n^* \in \mathfrak{S}^*$, $\zeta \neq 0$ und gilt

$$s_n^* \to x^*, \qquad (A^* - \zeta I)\, s_n^* \to s \in \mathfrak{S}, \tag{19}$$

so ist $x^* \in \mathfrak{S}$ und $(A - \zeta I)\, x^* = s$.

Da nämlich A^* und somit auch $A^* - \zeta I$ abgeschlossen ist, folgt aus (19) zunächst, daß $x^* \in \mathfrak{S}^*$ und

$$(A^* - \zeta I)\, x^* = s \tag{20}$$

ist. Da A nach (α) wesentlich selbstadjungiert ist, gibt es zu $x^* \in \mathfrak{S}^*$ eine Folge $s_n \in \mathfrak{S}$, so daß

$$s_n \to x^*, \qquad (A - \zeta I)\, s_n \to t \tag{21}$$

konvergiert und $(A^* - \zeta I)\, x^* = t$ ist[16]). Wegen (20) ist daher $t = s \in \mathfrak{S}$ und daraus folgt mit (21) und (a) weiter, daß $x^* \in \mathfrak{S}$ ist, womit wir (β) bewiesen haben.

(γ) Es sei $\mu \neq 0$ kein Eigenwert von A und s ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}$. Dann ist die Gleichung

$$(A - \mu I)\, x = s \tag{22}$$

stets durch ein $x \in \mathfrak{S}$ auflösbar.

Wir setzen die Lösung x der Gl. (22) gemäß dem bekannten Auflösungsverfahren für Funktionalgleichungen der Gestalt (22) in der Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{1}{\lambda_n - \mu} (s, e_n)\, e_n - \frac{1}{\mu} s \tag{23}$$

[16]) Siehe [5], Theorem 4.17 und Theorem 2.10.

an [17]); e_n durchläuft dabei das System $\mathfrak{E}$ aus (b), λ_n durchläuft die zugehörigen Eigenwerte. Wir zeigen zunächst, daß die Reihe in (23) konvergiert, so daß unser Ansatz sinnvoll ist. Ist μ kein Häufungspunkt von Eigenwerten, so ist die Folge der Zahlen $\frac{\lambda_n}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda_n - \mu}$ beschränkt, und daraus folgt die Konvergenz unserer Reihe nach bekannten Schlüssen. Ist μ ein Häufungspunkt von Eigenwerten, so konvergiert wegen (c) jedenfalls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(A s, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(s, A^* e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(s, e_n)|^2,$$

also auch die Reihe in (23). Entwickelt man nun $A s$ gemäß (b) in die Reihe $A s = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \lambda_\alpha (s, e_\alpha) e_\alpha$, so überzeugt man sich durch eine kurze Rechnung davon, daß $(A^* - \mu I) s_n^* \to s$ strebt, wobei

$$s_n^* = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda_\alpha}{\mu} \frac{1}{\lambda_\alpha - \mu} (s, e_\alpha) e_\alpha - \frac{1}{\mu} s$$

gesetzt ist. s_n^* wird wegen des eventuellen Auftretens generalisierter Eigenlösungen in $\mathfrak{S}^*$ liegen, aber nach (β) liegt der Grenzwert x der Folge s_n^* in $\mathfrak{S}$ und genügt der Gl. (22). Damit ist aber bewiesen, daß A die Eigenschaft (E) besitzt.

Satz 11. *Die folgenden Bedingungen sind zusammen notwendig und hinreichend dafür, daß ein auf $\mathfrak{S} \subseteq \bar{\mathfrak{S}}$ definierter symmetrischer Operator A finit ist:*

(a) *Für jede komplexe Zahl $\zeta \neq 0$ ist $A - \zeta I$ schwach abgeschlossen.*

(b) *Alle von Null verschiedenen Eigenwerte von A haben endliche Vielfachheit.*

(c) *Für jedes $s \in \mathfrak{S}$ gilt die Entwicklung* (17) *mit einem orthonormalen System $\mathfrak{E}$ von Eigenlösungen von A.*

(d) *Ist $\mu \neq 0$ ein Häufungspunkt von Eigenwerten von A und $s \in \mathfrak{S}$ orthogonal zu $\mathfrak{R}(A - \mu I)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n - \mu}\right)^2 |(s, e_n)|^2$, wobei e_n alle Eigenlösungen aus $\mathfrak{E}$ mit $(s, e_n) \neq 0$ und nur diese durchläuft; λ_n sind die zugehörigen Eigenwerte* [18]).

Wir beweisen zunächst, daß diese Bedingungen notwendig sind. Da A als finiter Operator die Eigenschaft (E) besitzt, ist $A - \zeta I$ nach Satz 5 jedenfalls für alle Zahlen $\zeta \neq 0$ schwach abgeschlossen, die keine Eigenwerte von A sind. Nun sei $\zeta \neq 0$ ein Eigenwert von A und es strebe

$$s_n \to \bar{s} \quad (s_n \in \mathfrak{S}), \qquad (A - \zeta I) s_n \to t \in \mathfrak{S}. \tag{24}$$

Aus (24) folgt wegen der Abgeschlossenheit von A^*, daß

$$\bar{s} \in \mathfrak{S}^* \quad \text{und} \quad (A^* - \zeta I) \bar{s} = t \tag{25}$$

[17]) Siehe etwa [4], S. 233.

[18]) λ_n kann also niemals mit μ übereinstimmen, so daß $\frac{1}{\lambda_n - \mu}$ für alle n definiert ist.

ist. Nun besitzt t nach (16) die Zerlegung

$$t = k + (A - \zeta I)\, s \quad \text{mit} \quad k \in \mathfrak{N}(A - \zeta I), \qquad s \in \mathfrak{S}.$$

Daraus folgt mit (25), daß

$$(A^* - \zeta I)\,(\bar{s} - s) = k \tag{26}$$

ist. Da aber der Bildbereich der symmetrischen Transformation A^* orthogonal zu $k \in \mathfrak{N}(A - \zeta I)$ ist, ergibt sich aus (26), daß $k = 0$, also $\bar{s} - s = k^* \in \mathfrak{N}(A^* - \zeta I)$ ist. Da nach Satz 4 die Kerne $\mathfrak{N}(A^* - \zeta I)$ und $\mathfrak{N}(A - \zeta I)$ übereinstimmen, folgt, daß $k^* \in \mathfrak{S}$, also auch $\bar{s} = k^* + s$ ein Element aus $\mathfrak{S}$ ist, was zusammen mit (25) die schwache Abgeschlossenheit von $A - \zeta I$ ergibt.

(b) folgt unmittelbar aus der Definition der Finitheit, (c) gilt nach Satz 9. Ist die Zahl μ in (d) selbst kein Eigenwert von A, so beweist man (d) ganz entsprechend wie (c) in Satz 10. Für den Fall, daß μ ein Eigenwert ist, benötigen wir einen Hilfssatz, der auch an sich von Interesse ist und den wir gleich etwas allgemeiner formulieren wollen, als in diesem Zusammenhang nötig ist.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{S}$ zerlegt in orthogonale Komplemente $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, also*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, \qquad \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \{0\} \tag{27}$$

und ist $\mathfrak{U}_1$ invariant unter dem symmetrischen finiten Operator A, so ist die Einschränkung A' von A auf $\mathfrak{U}_1$ ebenfalls ein symmetrischer finiter Operator.

Den Beweis des Hilfssatzes verschieben wir auf später, um unsere gegenwärtige Darstellung nicht zu unterbrechen. Ist $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von A, so haben wir in $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}(A - \mu I) + (A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ eine Zerlegung des Raumes $\mathfrak{S}$ von der im Hilfssatz 3 genannten Art, und da $(A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ unter A invariant ist, ist also die Einschränkung A' von A auf $(A - \mu I)\,\mathfrak{S}$ symmetrisch und finit. Die Eigenwerte von A' sind offenbar genau die von μ verschiedenen Eigenwerte von A. Aus diesen Bemerkungen folgt wie oben, als wir (d) für den Fall eines Nichteigenwertes μ bewiesen, daß die Reihe in (d) für jedes Element s der Form $s = (A - \mu I)\, x$, also für jedes s orthogonal zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ konvergiert.

Wir zeigen nun, daß die Bedingungen (a)–(d) auch hinlänglich sind. Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert von A, so ist die Gleichung

$$(A - \mu I)\, x = s \tag{28}$$

für jedes $s \in \mathfrak{S}$ auflösbar, was man genau so beweist wie die entsprechende Behauptung im Teil (γ) des Beweises zu Satz 10 [19]). Es sei nun $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von A. Wegen (b) ist $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ von endlicher Dimension, also ein vollständiger Hilbert-Raum, und daher gibt es zu $\mathfrak{N}(A - \mu I)$ ein orthogonales Komplement $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{S}$ [20]). Da wegen der Realität von μ der Operator

[19]) Dabei tritt eine Vereinfachung dadurch ein, daß die Größen s_n^* alle in $\mathfrak{S}$ liegen. Man braucht also nicht die auf (β) gestützte Zusatzüberlegung, sondern kann unmittelbar (α) anwenden.

[20]) Siehe [8], S. 116, Theorem 3.

$A-\mu I$ symmetrisch ist, liegt $(A-\mu I)\,\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{C}$, und es genügt nun offenbar nachzuweisen, daß für jedes $s\in\mathfrak{C}$, d.h. für jedes zu $\mathfrak{N}(A-\mu I)$ orthogonale Element s die Gl. (28) auflösbar ist. Dies zeigt man wiederum mittels des Verfahrens, das im Teil (γ) des Beweises von Satz 10 benutzt wurde, wobei man in den Ansatz (23) nur die $e_n\in\mathfrak{E}$ mit $(s,e_n)\neq 0$ aufnimmt und bei der Konvergenzbetrachtung zum Schluß die durch (a) gesicherte schwache Abgeschlossenheit von $A-\mu I$ heranziehen muß.

Um den Beweis des Satzes 11 vollständig zu machen, haben wir nun nur noch den sehr einfachen Beweis des Hilfssatzes 3 nachzutragen.

Die Symmetrie des Operators A' in diesem Hilfssatz versteht sich von selbst, und aus der Symmetrie von A und der Orthogonalität der Teilräume $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ folgt sehr einfach, daß mit $\mathfrak{U}_1$ auch $\mathfrak{U}_2$ unter A invariant ist. Nun genügt es ersichtlich zu zeigen, daß man für jede Zahl $\lambda\neq 0$ den Raum $\mathfrak{U}_1$ in der Form

$$\mathfrak{U}_1=\mathfrak{N}(A'-\lambda I)+(A'-\lambda I)\,\mathfrak{U}_1 \tag{29}$$

zerlegen kann[21]). Es sei u_1 ein beliebiges Element von $\mathfrak{U}_1$. Nach (16) ist

$$u_1=k+(A-\lambda I)\,s,\qquad k\in\mathfrak{N}(A-\lambda I),\qquad s\in\mathfrak{S}, \tag{30}$$

und nach (27) ist

$$k=k_1+k_2,\qquad s=s_1+s_2;\qquad k_i,\,s_i\in\mathfrak{U}_i,\qquad i=1,2.$$

Mit (30) folgt aus diesen Zerlegungen die Gleichung

$$u_1-k_1-(A-\lambda I)\,s_1=k_2+(A-\lambda I)\,s_2,$$

wobei die linke Seite in $\mathfrak{U}_1$, die rechte jedoch in $\mathfrak{U}_2$ liegt. Also muß die linke Seite verschwinden, d.h. es ist

$$u_1=k_1+(A-\lambda I)\,s_1=k_1+(A'-\lambda I)\,s_1. \tag{31}$$

Nun brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $k_1\in\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$ ist. Das ist aber fast selbstverständlich; denn wegen $0=(A-\lambda I)\,k=(A-\lambda I)\,k_1+(A-\lambda I)\,k_2$ ist $(A-\lambda I)\,k_1=-(A-\lambda I)\,k_2$, und da bei dieser Gleichung wiederum die linke Seite in $\mathfrak{U}_1$, die rechte jedoch in $\mathfrak{U}_2$ liegt, ist $(A-\lambda I)\,k_1=(A'-\lambda I)\,k_1=0$, also $k_1\in\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$. Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Erinnern wir uns noch einmal an das erste Beispiel für einen Operator, der die Eigenschaft (E) besitzt, am Anfang dieser Arbeit! Wählt man dort die Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{A}$ etwa alle reell und paarweise verschieden, so stellt $\mathfrak{A}$ einen symmetrischen finiten Operator auf dem Raum $\mathfrak{S}_0$ dar. Man sieht an diesem Beispiel, daß die Spektren symmetrischer finiter Operatoren sehr mannigfache Formen annehmen können. Diese Situation ändert sich jedoch sofort, wenn der Raum $\mathfrak{S}$ vollständig ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

[21]) $\mathfrak{N}(A'-\lambda I)$ ist als Unterraum von $\mathfrak{N}(A-\lambda I)$ trivialerweise von endlicher Dimension.

Satz 12. *Ist A ein symmetrischer finiter Operator auf dem vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, so können sich die Eigenwerte von A nur im Nullpunkt häufen, und A ist vollstetig.*

Beweis. Da $\mathfrak{H}$ vollständig ist, folgt aus der Orthogonalzerlegung (16) in leicht ersichtlicher Weise, daß $(A-\lambda I)\,\mathfrak{H}$ für jedes $\lambda \neq 0$ abgeschlossen, also auch vollständig ist. Außerdem ist nach dem Satz von HELLINGER-TOEPLITZ [22]) A beschränkt, also ist auch $A'-\lambda I$, die Einschränkung von $A-\lambda I$ auf $(A-\lambda I)\,\mathfrak{H}$ beschränkt. Aus diesen beiden Bemerkungen und dem Umstand, daß $A'-\lambda I$ den Raum $(A-\lambda I)\,\mathfrak{H}$ eineindeutig auf sich abbildet, folgt nach [*1*], S. 41, Théorème 5, daß $(A'-\lambda I)^{-1}$ beschränkt ist. Wäre λ ein Häufungspunkt von Eigenwerten, so gäbe es eine Folge von Eigenwerten $\lambda_n \neq \lambda$, die gegen λ strebt; e_n sei eine normierte Eigenlösung zu λ_n. Alle e_n liegen offenbar in $(A-\lambda I)\,\mathfrak{H}$, und es gilt

$$(A'-\lambda I)\,e_n = (A-\lambda_n I)\,e_n + (\lambda_n-\lambda)\,e_n = (\lambda_n-\lambda)\,e_n \to 0,$$

also auch

$$e_n = (A'-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)\,e_n \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty,$$

im Widerspruch zu $\|e_n\| = 1$. In der Tat können sich also die Eigenwerte von A nur in 0 häufen. Zusammen mit Satz 9 folgt daraus nach der spektralen Charakterisierung der vollstetigen Operatoren [23]), daß A vollstetig ist.

Für allgemeine symmetrische Operatoren mit der Eigenschaft (E) auf vollständigen Hilbert-Räumen gilt keine ähnlich einfache Aussage über die Struktur des Spektrums, wie etwa das zweite Beispiel am Anfang dieser Arbeit lehrt. Nimmt man jedoch die zusätzliche Voraussetzung auf, daß höchstens abzählbar viele Eigenwerte vorhanden sind, so kann man jedenfalls den folgenden Satz beweisen.

Satz 13. *Ist A ein symmetrischer Operator mit der Eigenschaft* (E) *auf einem vollständigen Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, so ist jeder von Null verschiedene Häufungspunkt von Eigenwerten selbst ein Eigenwert von A. Besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte, so ist mindestens ein von Null verschiedener Eigenwert isoliert.*

Beweis. Ist $\mu \neq 0$ kein Eigenwert, so existiert wegen (E) die Inverse $(A-\mu I)^{-1}$ auf ganz $\mathfrak{H}$ und ist nach [*1*], S. 41, Théorème 5 beschränkt, da A und somit auch $A-\mu I$ nach dem oben zitierten Satz von HELLINGER-TOEPLITZ beschränkt ist. μ ist dann also ein (innerer) Punkt der Resolventenmenge von A. Jeder Häufungspunkt von Eigenwerten von A ist also entweder der Nullpunkt oder selbst ein Eigenwert. Die Menge, die aus allen Eigenwerten von A und der Null besteht, falls $0 \in Sp(A)$, ist also abgeschlossen. Nach Satz 7 besitzt diese Menge mindestens ein von Null verschiedenes Element. Ist sie höchstens abzählbar, so kann sie nicht auch noch in sich

[22]) Siehe [*4*], S. 295.
[23]) Siehe [*4*], S. 232.

dicht sein; denn dann wäre sie perfekt, also überabzählbar. Sie besitzt also einen isolierten Punkt. Ist dieser Punkt der Nullpunkt, so können wir ihn herausnehmen und auf die (nicht-leere, abgeschlossene und höchstens abzählbare) Restmenge denselben Schluß anwenden, der die Behauptung des Satzes beweist.

Literatur

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] Heuser, H.: Über Operatoren mit endlichen Defekten. Diss. Tübingen 1956. — [3] Loomis, L. H.: The Converse of the Fatou Theorem for Positive Harmonic Functions. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 239—250 (1943). — [4] Riesz, F., et B. v. Sz.-Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [5] Stone, M. H.: Linear Transformations in Hilbert, Space and their Applications to Analysis. New York 1932. — [6] Wielandt, H.: Über die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten. Math. Nachr. **4**, 308—314 (1950/51). — [7] Wielandt, H.: Allgemeine Eigenwerttheorie. Vorlesung SS 1952, Tübingen. — [8] Zaanen, A. C.: Linear Analysis. Amsterdam-Groningen 1953.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 3. Februar 1960)

Tamaschke, O.
Math. Zeitschr. 74, 186—190 (1960)

Submodulare Verbände

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Olaf Tamaschke

In der Theorie der Verbände betrachtet man häufig projektive Intervalle. Das geschieht zumeist so, daß in der Menge aller Intervalle eines Verbandes die Äquivalenzrelation der Projektivität eingeführt wird. In längenendlichen Verbänden ist es zuweilen jedoch zweckmäßiger, sich auf die Menge aller Primquotienten zu beschränken und in dieser Menge die Äquivalenzrelation der Projektivität zu erklären.

In der Gruppentheorie interessiert man sich für den Verband $s\mathfrak{G}$ der subnormalen Untergruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlicher Kompositionsreihe. Eine genauere Untersuchung des Verbandes $s\mathfrak{G}$ (die in einer nachfolgenden Arbeit durchgeführt wird) legt es nahe, nach denjenigen längenendlichen Verbänden zu fragen, in denen sich die projektiven Primquotienten ähnlich verhalten wie die projektiven Kompositionsfaktorgruppen in $s\mathfrak{G}$.

Das ist für uns der Beweggrund, die Axiome der Halbmodularität nach unten wie nach oben abzuschwächen. Es gelingt so, eine Klasse von längenendlichen Verbänden auszuzeichnen, die mit einigen Eigenschaften an die modularen längenendlichen Verbände heranreichen, die aber andererseits nicht alle die Jordan-Dedekindsche Kettenbedingung erfüllen. Wir kennzeichnen die Verbände dieser Klasse durch ihre Kongruenzrelationen (Satz 1) und charakterisieren ihre neutralen Elemente mit Hilfe der Projektivität von Primquotienten (Satz 3).

Es sei L ein längenendlicher Verband, d.h. jede Kette zwischen irgend zwei Elementen $a \geqq b$ von L habe endliche Länge. Wir schreiben $a \cdot > b$, wenn a oberer Nachbar ist von b. Ein Paar von benachbarten Elementen $a \cdot > b$ nennen wir auch einen Primquotienten a/b von L. Mit K_L bezeichnen wir die Menge aller Primquotienten von L. Es ist $a/b = c/d$ in K_L genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Zwei Primquotienten a/b und c/d heißen *transponiert*, wenn ($a = b \cup c$ *und* $d = b \cap c$) oder ($c = a \cup d$ *und* $b = a \cap d$) gilt; sie heißen *projektiv* (in Zeichen: $a/b \,\pi\, c/d$), wenn eine Kette transponierter Primquotienten existiert, die von a/b zu c/d führt. π ist eine Äquivalenzrelation in K_L. Es sei K_L/π die Menge aller Äquivalenzklassen von K_L nach π.

$\varkappa$ sei eine Kongruenzrelation in L, d.h. eine Äquivalenzrelation, die mit den Verknüpfungen von L verträglich ist. Ist der Primquotient a/b projektiv zu c/d, so gilt $a \equiv b \pmod{\varkappa}$ genau dann, wenn $c \equiv d \pmod{\varkappa}$. Zum Beweis dieser Aussage gehe man auf transponierte Primquotienten zurück.

Die Kongruenzrelationen in L bilden einen distributiven Verband $\hat{L}$ [1, S. 23, Theor. 4, S. 24 Theor. 5 und S. 133 Theor. 1]. Ist a/b ein Primquotient und sind $\varkappa$, λ Kongruenzrelationen in L, so gilt

$a \equiv b \pmod{\varkappa \cap \lambda}$ genau dann, wenn $a \equiv b \pmod{\varkappa}$ *und* $a \equiv b \pmod{\lambda}$,
$a \equiv b \pmod{\varkappa \cup \lambda}$ genau dann, wenn $a \equiv b \pmod{\varkappa}$ *oder* $a \equiv b \pmod{\lambda}$.

Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtungen zusammen.

LEMMA. *Jede Kongruenzrelation $\varkappa$ in einem längenendlichen Verband L ist eindeutig bestimmt durch die Menge $\mathsf{B}_\varkappa \subseteq K_L/\pi$ derjenigen Äquivalenzklassen $\mathfrak{p}$ aus K_L/π, die von $\varkappa$ „annulliert" werden: Aus $a/b \in \mathfrak{p}$ folgt $a \equiv b \pmod{\varkappa}$. Die Abbildung $\varkappa \to \mathsf{B}_\varkappa$ ist ein Isomorphismus von $\hat{L}$ auf einen Teilverband des Verbandes $\mathfrak{P}(K_L/\pi)$ aller Teilmengen von K_L/π, der, den trivialen Kongruenzrelationen entsprechend, die leere Menge $\varnothing$ und die Gesamtmenge K_L/π als Null- und Einselement enthält.*

Als Verallgemeinerung der Halbmodularität nach unten bzw. nach oben (lower resp. upper semi-modularity [1, S. 100]) führen wir die folgenden Axiome ein:

($\underline{\mathrm{S}}$) *Aus $x \cdot > y \cdot > y$ folgt: Alle Primquotienten p/q mit $x \geqq p \cdot > q \geqq x \cap y$ sind projektiv zu $x \cup y/y$.*

($\overline{\mathrm{S}}$) *Aus $x \cdot > x \cap y$ folgt: Alle Primquotienten p/q mit $x \cup y \geqq p \cdot > q \geqq y$ sind projektiv zu $x/x \cap y$.*

DEFINITION. *Ein längenendlicher Verband L heißt „submodular", wenn ($\underline{\mathrm{S}}$) und ($\overline{\mathrm{S}}$) in L gelten.*

Der längenendliche Verband L sei submodular. Beim Übergang zum dualen Verband von L gehen Primquotienten wieder in Primquotienten und projektive Primquotienten wieder in projektive Primquotienten über. ($\underline{\mathrm{S}}$) und ($\overline{\mathrm{S}}$) werden dabei miteinander vertauscht. Der zu L duale Verband ist submodular. *Es gilt das Dualitätsprinzip für submodulare längenendliche Verbände.*

SATZ 1. *Ein längenendlicher Verband L ist genau dann submodular, wenn es zu jeder Teilmenge $\mathsf{B} \subseteq K_L/\pi$ eine Kongruenzrelation $\varkappa_\mathsf{B}$ in L gibt, die genau die Klassen $\mathfrak{p} \in \mathsf{B}$ annulliert (d.h. wenn die Abbildung $\varkappa \to \mathsf{B}_\varkappa$ sogar ein Isomorphismus von $\hat{L}$ auf $\mathfrak{P}(K_L/\pi)$ ist).*

BEWEIS. (a) L sei submodular und B eine beliebige Teilmenge von K_L/π. Wir definieren eine Relation $\varkappa_\mathsf{B}$ in L: Es sei $a \equiv b \pmod{\varkappa_\mathsf{B}}$ genau dann, wenn $a = b$ ist, oder wenn es Elemente $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ gibt, derart, daß

$$(a_{i-1} \cdot > a_i \text{ und } \mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}) \quad \text{oder} \quad (a_i \cdot > a_{i-1} \text{ und } \mathfrak{p}(a_i/a_{i-1}) \in \mathsf{B})$$

gilt für $i = 1, \ldots, n$. $\varkappa_\mathsf{B}$ ist eine Äquivalenzrelation in L. Wir zeigen, daß $a_{i-1} \cap c \equiv a_i \cap c \pmod{\varkappa_\mathsf{B}}$ und $a_{i-1} \cup c \equiv a_i \cup c \pmod{\varkappa_\mathsf{B}}$ zutrifft für $i = 1, \ldots, n$ und jedes $c \in L$. Dann gilt auch $a \cap c \equiv b \cap c \pmod{\varkappa_\mathsf{B}}$ und $a \cup c \equiv b \cup c \pmod{\varkappa_\mathsf{B}}$ für jedes $c \in L$. $\varkappa_\mathsf{B}$ ist dann eine Kongruenzrelation in L.

Wir setzen o.B.d.A. $a_{i-1} \cdot > a_i$ voraus. Ist $a_{i-1} \cap c \neq a_i \cap c$, also $(a_{i-1} \cap c) \cup a_i = a_{i-1} \cdot > a_i$, so folgt mit ($\underline{\mathrm{S}}$), daß alle Primquotienten zwischen $a_{i-1} \cap c$ und

$a_i \cap c$ in $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}$ liegen. Daher ist $a_{i-1} \cap c \equiv a_i \cap c \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$. Gilt $a_{i-1} \cup c \neq a_i \cup c$, also $a_{i-1} \cdot > a_i = a_{i-1} \cap (a_i \cup c)$, dann folgern wir mit $(\overline{\mathrm{S}})$, daß alle Primquotienten zwischen $a_{i-1} \cup c$ und $a_i \cup c$ in $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in \mathsf{B}$ enthalten sind. Somit ist $a_{i-1} \cup c \equiv a_i \cup c \pmod{\varkappa_{\mathsf{B}}}$.

(b) Wir setzen voraus, daß zu jeder Teilmenge B von K_L/π eine Kongruenzrelation existiert, die genau die Klassen aus B annulliert. Es sei $x \cup y \cdot > y$ und $\varkappa$ die durch $\mathsf{B} = \{\mathfrak{p}(x \cup y/y)\}$ bestimmte Kongruenzrelation in L. Es gilt $x \cup y \equiv y \pmod{\varkappa}$ und daraus folgt $x = x \cap (x \cup y) \equiv x \cap y \pmod{\varkappa}$. Mithin liegen alle Primquotienten zwischen x und $x \cap y$ in $\mathfrak{p}(x \cup y/y)$ und daher ist $(\underline{\mathrm{S}})$ erfüllt. Ist $x \cdot > x \cap y$, dann betrachten wir die durch $\Gamma = \{\mathfrak{p}(x/x \cap y)\}$ bestimmte Kongruenzrelation λ in L. Aus $x \equiv x \cap y \pmod{\lambda}$ folgt $x \cup y \equiv (x \cap y) \cup y = y \pmod{\lambda}$, d.h. alle Primquotienten zwischen $x \cup y$ und y gehören zu $\mathfrak{p}(x/x \cap y)$. $(\overline{\mathrm{S}})$ gilt in L und L ist ein submodularer längenendlicher Verband.

SATZ 2. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband und a, b seien Elemente von L. Sind $a = a_0 \cdot > a_1 \cdot > \cdots \cdot > a_r = a \cap b$ und $a \cup b = b_0 \cdot > b_1 \cdot > \cdots \cdot > b_s = b$ zwei beliebige maximale Ketten von a bis $a \cap b$ und von $a \cup b$ bis b, so ist die Menge der Klassen $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i) \in K_L/\pi$ $(i = 1, \ldots, r)$ gleich der Menge der Klassen $\mathfrak{p}(b_{k-1}/b_k) \in K_L/\pi$ $(k = 1, \ldots, s)$, d.h. jeder Primquotient a_{i-1}/a_i ist projektiv zu einem Primquotienten b_{k-1}/b_k und jeder Primquotient b_{h-1}/b_h ist projektiv zu einem Primquotienten a_{j-1}/a_j.*

BEWEIS. Es seien α, β die zur Menge A der $\mathfrak{p}(a_{i-1}/a_i)$ bzw. zur Menge B der $\mathfrak{p}(b_{k-1}/b_k)$ gehörigen Kongruenzrelationen in L. Es gilt $a \equiv a \cap b \pmod{\alpha}$ und daraus folgt $a \cup b \equiv (a \cap b) \cup b = b \pmod{\alpha}$, also $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$. Entsprechend ist $a \cup b \equiv b \pmod{\beta}$ und daher auch $a = a \cap (a \cup b) \equiv a \cap b \pmod{\beta}$, d.h. $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$. Mithin ist $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Ein Element a eines Verbandes L heißt *neutral* in L, wenn für beliebige Elemente x, y aus L der von a, x, y erzeugte Verband distributiv ist [*1*, S. 28].

SATZ 3. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband und a ein Element von L. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *a ist neutral in L.*
(2) *Die Abbildung $x \to x \cap a$ ist ein Endomorphismus von L.*
(3) *Die Abbildung $x \to x \cup a$ ist ein Endomorphismus von L.*
(4) *Kein Primquotient p/q, $q \geqq a$ ist projektiv zu einem Primquotienten r/s, $a \geqq r$.*

BEWEIS. I) Wir zeigen, daß (4) aus (2) folgt. Angenommen, es gibt einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$, der projektiv ist zu einem Primquotienten r/s, $a \geqq r$. Dann wird p/q von der Abbildung $x \to x \cap a$ annulliert, d.h. es gilt $p \cap a = q \cap a$. Hingegen wird der Primquotient r/s von dieser Abbildung nicht annulliert. Sie kann keinen Endomorphismus von L liefern, weil jeder Verbandshomomorphismus mit p/q auch r/s annulliert.

II) Aus (4) folgt (2). Es sei $\Delta = \Delta(a)$ die Menge aller Klassen $\mathfrak{p}(p/q) \in K_L/\pi$, die einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$ enthalten. $\delta = \delta(a)$ sei die zugehörige Kongruenzrelation in L. Wir zeigen zunächst, daß $x \cap a = y \cap a$ genau dann

gilt, wenn $x \equiv y \pmod{\delta}$. Gilt $h \cap a = k \cap a$ für einen Primquotienten h/k, so ist h nicht in a enthalten, also $h \cup a > a$. Nach Satz 2 ist jeder Primquotient aus einer Kette $h \cdot > k \cdot > \cdots \cdot > k \cap a = h \cap a$ projektiv zu einem Primquotienten p/q aus einer Kette $h \cup a \cdot > \cdots \cdot > a$. Folglich ist $\mathfrak{p}(h/k)$ in Δ enthalten. Andererseits wird auch jeder Primquotient h/k mit $\mathfrak{p}(h/k) \in \Delta$ beim Schnitt mit a annulliert. Denn angenommen, es ist $h \cap a > k \cap a$, also $h = (h \cap a) \cup k \cdot > k$. Wegen (S) ist jeder Primquotient zwischen $h \cap a$ und $k \cap a$ projektiv zu h/k. Nach Definition von Δ gibt es einen Primquotienten p/q, $q \geqq a$, der projektiv ist zu h/k und daher auch projektiv ist zu einem Primquotienten r/s zwischen $h \cap a$ und $k \cap a$. Das ist ein Widerspruch gegen (4). Die Abbildung $x \to x \cap a$ annulliert mithin genau die Primquotienten h/k, die zu einer Äquivalenzklasse aus Δ gehören. Sie ruft in L die Kongruenzrelation δ hervor. Es gilt $x \equiv x \cap a \pmod{\delta}$ für alle $x \in L$. Die Kongruenzrelation δ stimmt auf dem Teilverband aller $c \leqq a$ mit der Gleichheitsrelation überein. Aus $(x \cap a) \cup (y \cap a) \equiv x \cup y \equiv (x \cup y) \cap a \pmod{\delta}$ folgt daher $(x \cap a) \cup (y \cap a) = (x \cup y) \cap a$ für alle $x, y, \in L$. Die Gleichung $(x \cap a) \cap (y \cap a) = (x \cap y) \cap a$ ist trivial. Der Schnitt mit a ist ein Endomorphismus von L.

III) Die Aussage (4) bleibt erhalten, wenn wir zum dualen Verband übergehen. Aus der Gleichwertigkeit von (2) und (4) und aus dem Dualitätsprinzip für submodulare längenendliche Verbände folgt, daß auch (3) und (4) gleichwertig sind.

IV) Aus (1) folgen (2) und (3). Wir setzen jetzt (2) voraus. Dann gilt auch (3). Nach [*1*, S. 28 Theor. 10] folgt (1), wenn wir die folgende Aussage beweisen: Aus $x \cup a = y \cup a$ und $x \cap a = y \cap a$ folgt $x = y$.

Es gelte $x \cup a = y \cup a$ und $x \cap a = y \cap a$. Angenommen, es ist $x \neq y$. Ein beliebiger Primquotient t/u aus einer maximalen Kette $x \cdot > \cdots \cdot > x \cap y \geqq x \cap a$ ist nach Satz 2 projektiv zu einem Primquotienten p/q zwischen $x \cup a$ und a. Nach dem gleichen Satz (angewandt auf x, y) existiert zwischen $x \cup y$ und y ein Primquotient v/w, der projektiv ist zu t/u. Wenden wir Satz 2 jetzt auf a, y an, so folgt wegen $a \cup y \geqq x \cup y$ die Existenz eines Primquotienten r/s zwischen a und $a \cap y$, der projektiv ist zu v/w. Dann ist der Primquotient p/q oberhalb a projektiv zum Primquotienten r/s unterhalb a. Das widerspricht der bereits bewiesenen Gleichwertigkeit von (2) und (4). Also ist $x = y$. Damit ist der Beweis von Satz 3 vollendet.

Es gibt submodulare längenendliche Verbände, die Elemente $a > b$ enthalten mit der Eigenschaft, daß nicht alle maximalen Ketten von a bis b gleichlang sind.

Beispiel. Es sei V der Verband aller Untergruppen der Kleinschen Vierergruppe. Die Verbände V_1 und V_2 seien isomorph zu V. Wir fügen V_1 und V_2 zu einem neuen Verband zusammen, indem wir das maximale Element von V_1 mit dem maximalen Element von V_2 identifizieren und das minimale Element von V_1 als oberen Nachbarn über das minimale Element von V_2 setzen. In dem so entstehenden Verband S_9 aus 9 Elementen sind alle Primquotienten zueinander projektiv. S_9 ist daher submodular. Es gibt aber zwischen dem

maximalen und dem minimalen Element von S_9 sowohl maximale Ketten der Länge 2 als auch maximale Ketten der Länge 3.

Ein Teilverband eines submodularen längenendlichen Verbandes ist im allgemeinen kein submodularer Verband. So bilden in S_9 die Elemente einer maximalen Kette der Länge 2 zusammen mit den Elementen einer maximalen Kette der Länge 3 einen Teilverband L_5 aus 5 Elementen, der nicht submodular ist. Hingegen gilt

SATZ 4. *Jedes homomorphe Bild eines submodularen längenendlichen Verbandes L ist ein submodularer längenendlicher Verband.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß die Restklassenstruktur $L/\varkappa$ von L nach einer beliebigen Kongruenzrelation $\varkappa$ in L einen submodularen längenendlichen Verband bildet. Mit $\bar{x}$ bezeichnen wir die Menge aller $y \equiv x \pmod{\varkappa}$, also das Bild von x bei dem natürlichen Homomorphismus von L auf $L/\varkappa$.

$L/\varkappa$ ist ein längenendlicher Verband. Wir setzen $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y} \cdot > \bar{y}$ voraus. In einer maximalen Kette $x \cup y = a_0 \cdot > a_1 \cdot > \cdots \cdot > a_m = y$ gibt es ein kleinstes Element $a_i \equiv x \cup y \pmod{\varkappa}$ und ein größtes Element $a_j \equiv y \pmod{\varkappa}$. Unsere Voraussetzung besagt $j = i+1$. Denn aus $a_i > a_k > a_j$ folgt $a_k \not\equiv a_i \pmod{\varkappa}$ und $a_k \not\equiv a_j \pmod{\varkappa}$, also $\bar{x} \cup \bar{y} = \bar{a}_i > \bar{a}_k > \bar{a}_j = \bar{y}$. Wird $\varkappa$ durch $\mathsf{B} \subseteq K_L/\pi$ bestimmt (Satz 1), so sind alle Klassen $\mathfrak{p}(a_l/a_{l+1})$ in B enthalten bis auf $\mathfrak{p}(a_i/a_{i+1})$. In jeder maximalen Kette $x = b_0 \cdot > b_1 \cdot > \cdots \cdot > b_n = x \cap y$ gilt daher nach Satz 2 $b_h \not\equiv b_{h+1} \pmod{\varkappa}$ genau dann, wenn $b_h/b_{h+1} \pi a_i/a_{i+1}$. Daraus folgt $\bar{b}_h/\bar{b}_{h+1} \pi \bar{a}_i/\bar{a}_{i+1} = \bar{x} \cup \bar{y}/\bar{y}$. Das heißt aber: Alle Primquotienten $\bar{p}/\bar{q}$ zwischen $\bar{x}$ und $\bar{x} \cap \bar{y} = \overline{x \cap y}$ sind projektiv zu $\bar{x} \cup \bar{y}/\bar{y}$. Folglich gilt (S) in $L/\varkappa$.

Wir bilden den zu L dualen Verband $\tilde{L}$. Dabei geht $\varkappa$ in eine Kongruenzrelation $\tilde{\varkappa}$ von $\tilde{L}$ über. In $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$ gilt (S) nach dem eben Bewiesenen. $L/\varkappa$ ist dual zu $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$. Beim Übergang von $\tilde{L}/\tilde{\varkappa}$ zu $L/\varkappa$ geht (S) in ($\overline{\text{S}}$) über. $L/\varkappa$ ist ein submodularer längenendlicher Verband.

Die Sätze 3 und 4 gestatten es, in jedem submodularen längenendlichen Verband eine Restklassenstruktur zu bilden, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der Kommutatorfaktorgruppe einer Gruppe besitzt.

SATZ 5. *Es sei L ein submodularer längenendlicher Verband. Mit Δ bezeichnen wir die Menge aller Klassen $\mathfrak{p} \in K_L/\pi$, die Primquotienten $a/b \pi c/d$ mit $b \geqq c$ enthalten. δ sei die zugehörige Kongruenzrelation in L. Dann ist $D(L) = L/\delta$ ein distributiver Verband. Ist $\varkappa$ eine Kongruenzrelation zu $\mathsf{B} \subseteq K_L/\pi$, so ist $L/\varkappa$ distributiv genau dann, wenn $\mathsf{B} \supseteq \Delta$, also $\varkappa \geqq \delta$. Insbesondere ist L distributiv genau dann, wenn $\Delta = \varnothing$.*

Literatur

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Revised edition 1948.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität
(Eingegangen am 20. März 1960)

Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume

Von Professor Dr. Demetrios A. Kappos,
Mathematisches Institut der Universität Athen

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete
Neue Folge, Heft 24)
IV, 136 Seiten Gr.-8°. 1960. Steif geheftet DM 21,80

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I: Der Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes. Beispiele von W-Feldern. Quasi-Wahrscheinlichkeitsfelder. Definition einer Quasi-Wahrscheinlichkeit auf jedem beliebigen Boolering. Separable Booleringe. Darstellung eines Booleringes durch einen Mengenkörper.

Kapitel II: Die unendlichen Operationen in W-Feldern. Metrik in W-Feldern. Metrische Erweiterung eines W-Feldes zu einem σ-W-Feld.

Kapitel III: Wahrscheinlichkeitsräume. Erweiterungen eines W-Raumes.

Kapitel IV: Cartesische Produkte von W-Feldern. W-Produkträume.

Kapitel V: w-Unabhängigkeit in W-Feldern. Algebraische Unabhängigkeit in Booleringen.

Kapitel VI: Unabhängigkeit von Mengensystemen bzw. von Systemen von Körpern. Fastunabhängigkeit. Stochastische Unabhängigkeit. Nicht separable (nicht empirische) invariante Erweiterungen des linearen Lebesgueschen W-Raumes.

Kapitel VII: Topologische bzw. kompakte W-Räume. Approximation bezüglich einer Quasi-Wahrscheinlichkeit, Kompaktheit einer Quasi-Wahrscheinlichkeit. Kompaktheit und Unabhängigkeit. Kompaktheit und cartesische Produkte. Quasi-Kompaktheit der W-Räume.

Kapitel VIII: Bedingte Wahrscheinlichkeitsräume · Anhang · Literaturverzeichnis · Zeichenindex · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Markov Chains with Stationary Transition Probabilities

By Kai Lai Chung,

Professor of Mathematics at Syracuse University (USA)

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 104)

X, 278 Seiten Gr.-8°. 1960. In englischer Sprache. DM 65,60; Ganzleinen DM 69,80

CONTENTS

Part I. Discrete Parameter.

Fundamental definitions. Transition probabilities. Classification of states. Recurrence. Criteria and examples. The main limit theorem. Various complements. Repetitive pattern and renewal process. Taboo probabilities. The generating function. The moments of first entrance time distributions. A random walk example. System theorems. Functionals and associated random variables. Ergodic theorems. Further limit theorems. Almost closed and sojourn sets.

Part II. Continuous Parameter.

Transition matrix: basic properties. Standard transition matrix. Differentiability. Definitions and measure-theoretic foundations. The sets of constancy. Continuity properties of sample functions. Further specifications of the process. Optional random variable. Strong Markov property. Classification of states. Taboo probability functions. Ratio limit theorems. Discrete approximations. Functionals. Post-exit process. Imbedded renewal process. The two systems of differential equations. The minimal solution. The first infinity. Examples. Addenda. Bibliography. Index.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG